

EJERCICIO 4

primer parcial 2013

(Grupo 1)

4. (2 puntos)

Dados los siguientes datos de concentración de butanol obtenido para diversos instantes de tiempo:

Tiempo (horas)	1	1.5	3	4.5
Concentración (g/l)	5	7.5	10	10.5

- A) Estimar la concentración de butanol para Tiempo=2 horas y para Tiempo=3.25 horas, empleando para ello una función polinómica a trozos constituida por un tramo polinómico de segundo grado en el intervalo [1, 3] y por un tramo polinómico de primer grado en el intervalo [3, 4.5].
- B) Representar gráficamente, de forma aproximada, la función interpoladora y la función de base asociada al tercer punto del soporte.

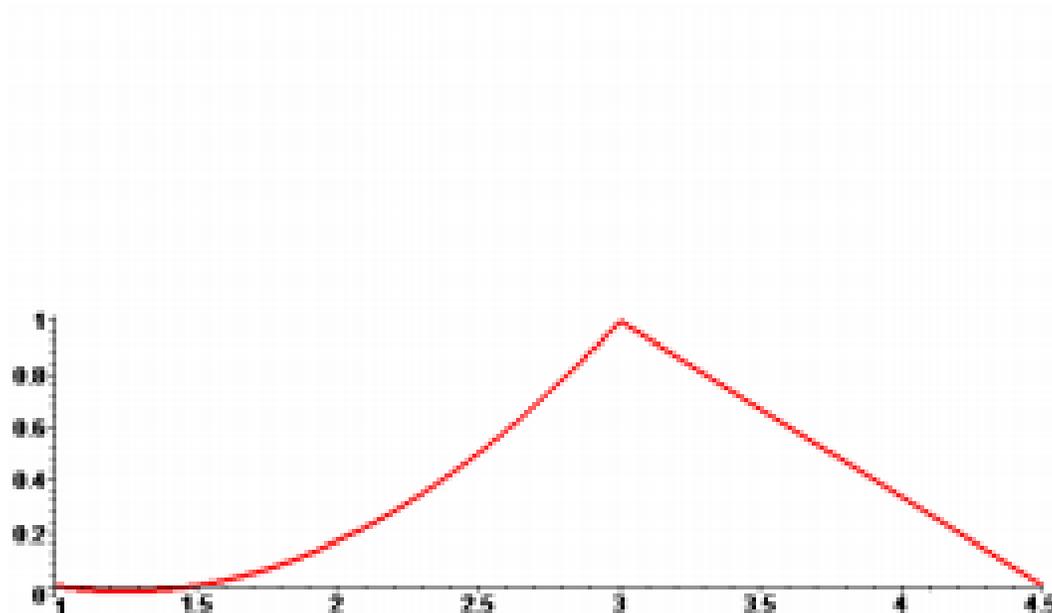
SOLUCIÓN

A)

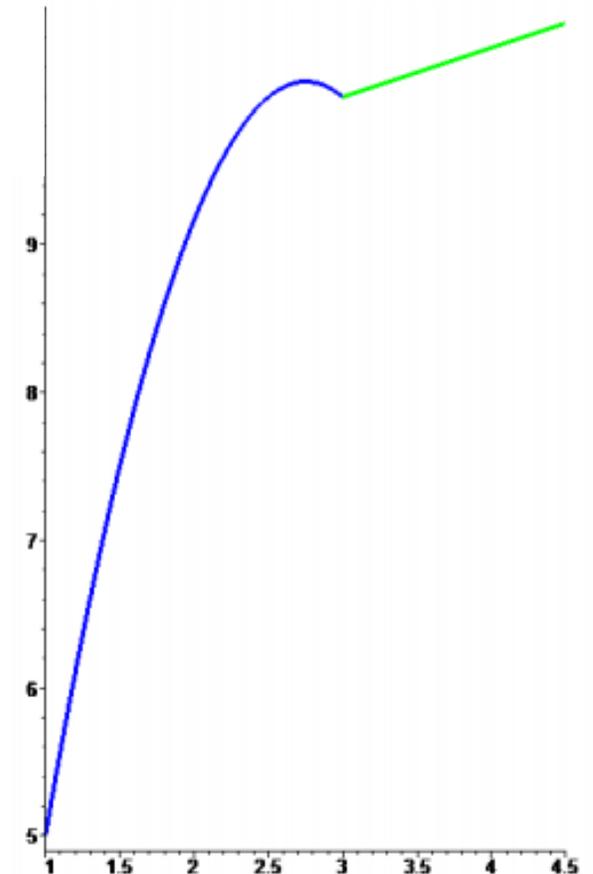
$$u(2) = 5 \frac{(2-1.5)(2-3)}{(1-1.5)(1-3)} + 7.5 \frac{(2-1)(2-3)}{(1.5-1)(1.5-3)} + 10 \frac{(2-1)(2-1.5)}{(3-1.5)(3-1)} = 9.17 \text{ g/l}$$

$$u(3.25) = 10 \frac{3.25-4.5}{3-4.5} + 10.5 \frac{3.25-3}{4.5-3} = 10.08 \text{ g/l}$$

B) Función de base asociada al tercer punto del soporte:



Función interpoladora:



EXPLICACIÓN

a) • Tramo polinómico de 2º grado en el intervalo $[1,3]$.

↳ 3 puntos $(1; 1,5; 3)$

$$p(x) = a + bx + cx^2 \rightarrow \text{polinomio de 2º grado}$$

Mediante interpolación de Lagrange podemos escribir: $p(x) = f_1 \cdot L_1(x) + f_2 \cdot L_2(x) + f_3 \cdot L_3(x)$

En la tabla del enunciado tenemos 2 variables:

1) La independiente $\rightarrow x \rightarrow$ tiempo

2) La dependiente $\rightarrow y \rightarrow$ concentración (a función del tiempo).
" "
" $f(x)$

Por lo tanto podemos sustituir f_1, f_2 y f_3 en nuestro polinomio:

$$p(x) = 5 \cdot L_1(x) + 7,5 \cdot L_2(x) + 10 \cdot L_3(x)$$

Para calcular $L_i(x)$ necesitamos conocer que $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ i \neq j}}^n \frac{x-x_j}{x_i-x_j}$ ($i=1, \dots, n$)

de aplicamos en nuestro ejercicio:

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = 1 \\ x_2 = 1,5 \\ x_3 = 3 \end{array} \right\} \begin{cases} L_1(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_3)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)} = \frac{(x-1,5)(x-3)}{(1-1,5)(1-3)} = \frac{(2-1,5)(2-3)}{(1-1,5)(1-3)} \\ L_2(x) = \frac{(x-x_1)(x-x_3)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)} = \frac{(x-1)(x-3)}{(1,5-1)(1,5-3)} = \frac{(2-1)(2-3)}{(1,5-1)(1,5-3)} \\ L_3(x) = \frac{(x-x_2)(x-x_1)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} = \frac{(x-1)(x-1,5)}{(3-1,5)(3-1)} = \frac{(2-1)(2-1,5)}{(3-1,5)(3-1)} \end{cases}$$

Utilizamos esta parte de la tabla.
Intervalo $[1, 3]$

	x_1	x_2	x_3
Tiempo (h)	1	1,5	3
Concentración (g/l)	5	7,5	10
	f_1	f_2	f_3

↑
Sustituimos x por 2,
ya que se nos pide estimar la
concentración de butanal para Tiempo = 2h

Una vez tenemos todos los valores, terminamos nuestro polinomio interpolador:

$$p(x=2) = p(2) = 5 \cdot \frac{(2-1,5)(2-3)}{(1-1,5)(1-3)} + 7,5 \cdot \frac{(2-1)(2-3)}{(1,5-1)(1,5-3)} + 10 \cdot \frac{(2-1)(2-1,5)}{(3-1,5)(3-1)} = \boxed{9,179/L}$$

- Tramo polinómico de 1er grado en el intervalo $[3; 4,5]$

$u(x)$ es del tipo $a + bx$.

↳ 2 puntos $(3; 4,5)$

Según Lagrange (y utilizando 2 puntos): $u(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x)$

Sustituyendo los datos conocidos de la tabla: $u(x) = 10 \cdot L_1(x) + 10,5 L_2(x)$

Utilizamos esta parte de la tabla.

Intervalo $[3; 4,5]$

	x_1	x_2
Tiempo (h)	3	4,5
Concentración (g/l)	10	10,5
	f_1	f_2

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} = \frac{(3,25 - 4,5)}{(3 - 4,5)}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)} = \frac{(3,25 - 3)}{(4,5 - 3)}$$

Sustituimos también $x = 3,25$, ya que se nos pide estimar la concentración de butanol para Tiempo = 3,25h

Una vez tenemos todos los datos, los sustituimos en nuestro polinomio interpolador:

$$u(3,25) = 10 \frac{3,25 - 4,5}{3 - 4,5} + 10,5 \frac{3,25 - 3}{4,5 - 3} = \boxed{10,08 \text{ g/l}}$$

b) Función interpoladora: tenemos que representar cada polinomio (sin valor en x) en su intervalo correspondiente.

$$\begin{aligned} [1,3] &\Rightarrow p(x) = 5 \frac{(x-1,5)(x-3)}{(1-1,5)(1-3)} + 7,5 \frac{(2-1)(2-3)}{(1,5-1)(1,5-3)} + 10 \frac{(2-1)(2-1,5)}{(3-1,5)(3-1)} \\ [3,4,5] &\Rightarrow u(x) = 10 \frac{(x-4,5)}{3-4,5} + 10,5 \frac{(x-3)}{4,5-3} \end{aligned} \left. \vphantom{\begin{aligned} [1,3] \\ [3,4,5] \end{aligned}} \right\} \begin{array}{l} \text{se resuelven y simplifican para} \\ \text{facilitar la representación.} \end{array}$$

Función de base asociada al 3^{er} punto del soporte.

Nos damos cuenta que en el intervalo $[1,3]$ hemos calculado un polinomio de 2^o grado y en el intervalo $[3,4,5]$ uno de 1^{er} grado.