**EJERCICIOS INTEGRACIÓN NUMÉRICA R**

1-Siendo f(x)=sen(x)+7 y x= {-1,0,3,5,8,10}. Construir la tabla de diferencias divididas empleando Newton y plantear el polinomio interpolador.

2-Dada la función f(x)=cos(x)+2x y el intervalo [0,5], aproximar la integral de f(x) mediante:

a) Fórmula del rectángulo (las dos)

b) Fórmula del punto medio

c) Fórmula de Simpson

d) Fórmula del Trapecio

3-Resolver la integral aplicando la fórmula de Gauss con 2 y 3 puntos, tener en cuenta que:

-Con dos puntos de soporte: c1=c2=1; z1= ; z2=

-Con tres puntos de soporte: c1=c3=5/9; c2=8/9; z1= ; z2=0; z3=

Siendo c los coeficientes y z una variable ya calculada.

Comparar el valor de la integral de la formula de Gauss con su valor exacto

Pd: Siempre van a darnos como dato en Gauss los coeficientes y el valor de z, que van cambiando según los puntos de soporte. No vale la pena aprender de donde salen c y z, ya que es un proceso muy complejo que incluye polinomios de legendre.

Resolución ejercicio 1

x=c(-1,0,3,5,8,10)

Creamos un vector x que contenga los puntos de soporte y un vector a que contenga el valor de la función para cada punto de soporte

f=function(x){sin(x)+7}

a=c(f(-1),f(0),f(3),f(5),f(8),f(10))

Inicializamos la matriz y la posición de las filas y los vectores. n será 6, que es el número de componentes tanto de f como de a

A=matrix(c(0),nrow=n,ncol=n)

n=length(x)

i=1

for (i in 1:n){

La primera columna será a, y a partir de estos valores calcularemos el resto de componentes, en el segundo bucle j se inicia en 2 porque la primera columna ya esta calculada. i llega hasta n-j+1 porque será una matriz triangular.

 A[i,1]=a[i]

}

for (j in 2:n){

 for (i in 1:(n-j+1)){

 A[i,j]=(A[(i+1),(j-1)]-A[i,(j-1)])/(x[i+j-1]-x[i])

 }

}

la formula del polinomio interpolador escrita tal cual sería

> p=function(x){A[1,1]+(A[2,1]\*(x+1))+(A[3,1]\*(x+1)\*x)+(A[4,1]\*(x+1)\*x\*(x-3))+(A[5,1]\*(x+1)\*x\*(x-3)\*(x-5))+(A[6,1]\*(x+1)\*x\*(x-3)\*(x-5)\*(x-8))}

> p

function(x){A[1,1]+(A[2,1]\*(x+1))+(A[3,1]\*(x+1)\*x)+(A[4,1]\*(x+1)\*x\*(x-3))+(A[5,1]\*(x+1)\*x\*(x-3)\*(x-5))+(A[6,1]\*(x+1)\*x\*(x-3)\*(x-5)\*(x-8))}

Ahora lo vamos a calcular según la fórmula

P(x)=a[1]+\*

> suma=0

i se inicia en 2 porque para 1 se saca fuera del sumatorio ya que no va multiplicado por ningún punto de de soporte. Como j va desde 1 hasta i-1, queda sin utilizar el último punto de soporte en el productorio.

> for(i in 2:n){

+ suma=suma+a[i]}

> producto=1

> for (j in 1:i-1){

+ producto=producto\*(x-x[i])}

> p=function(x){a[1]+(suma\*producto)}

Resolución ejercicio 2

> f=function(x){cos(x)+27}

> a=0 ; b=5

Hemos subrayado el valor exacto de la integral, que lo hemos calculado con el comando integrate().

Dependiendo de las fórmulas, la aproximación será mas o menos exacta.

> f(a) ; f(b)

[1] 28

[1] 27.28366

> integrate(f,0,5)

134.0411 with absolute error < 1.5e-12

Cuántos mas puntos de soporte, mas exacto será el valor al valor exacto (134.04).

El valor de Simpson (133.4) se ha calculado con tres puntos de soporte (a,,b).

El valor del Trapecio (138.2) se ha calculado con dos puntos de soporte (a,b).

El valor del rectángulo y del punto medio se ha calculado con un punto de soporte, y por eso son los valores más lejanos al exacto.

> rectangulo1=f(a)\*(b-a)

> rectangulo1

[1] 140

> rectangulo2=f(b)\*(b-a)

> rectangulo2

[1] 136.4183

> puntomedio=f((a+b)/2)\*(b-a)

> puntomedio

[1] 130.9943

> c=(b-a)/6

> simspson=c\*(f(a)+4\*f((a+b)/2)+f(b))

> simspson

[1] 133.3992

> trapecio=((f(a)+f(b))/2)\*(b-a)

> trapecio

[1] 138.2092

Resolución ejercicio 3

> f=function(x){sin(x)\*cos(x)}

Tras varios cálculos, se ha calculado que la fórmula de Gauss es:

Esta fórmula se tiene que aprender el alumno.

> a=0 ; b=pi

> integrate(f,0,pi)

7.30311e-17 with absolute error < 1.1e-14

> #con dos puntos de soporte

> ca1=1

> ca2=1

Para calcular la x que va dentro de la función habrá que hacer la siguiente cuanta y sustituir en cada caso:

x=z+

Esta fórmula también es conveniente aprendersela

> za1=(-sqrt(3))/3

> za2=(sqrt(3))/3

> m=(b-a)/2

> xa1=m\*za1 + (a+b)/2

> xa2=m\*za2 + (a+b)/2

> #como los coeficientes son 1 no se multiplican

> gauss2=m\*((sin(xa1)\*cos(xa1))+(sin(xa1)\*cos(xa2)))

> gauss2

Con tres puntos de soporte el valor que nos da es más exacto que para dos puntos.

El valor exacto es muy muy pequeño por lo que el error será “grande” con respecto al de la integral.

[1] 2.615901e-16

> #con 3 puntos de soporte

> cb1=5/9

> cb2=8/9

La fórmula de Gauss es más exacta que el resto de las fórmulas (trapecio, Simpson, punto medio, etc).

> cb3=5/9

> zb1=-sqrt(3/5)

> zb2=0

> zb3=sqrt(3/5)

> xb1=m\*zb1 + (a+b)/2

> xb2=m\*zb2 + (a+b)/2

> xb3=m\*zb3 + (a+b)/2

>gauss3=m\*(cb1\*(sin(xb1)\*cos(xb1))+cb2\*(sin(xb2)\*cos(xb2))+cb3\*(sin(xb3)\*cos(xb3))

> gauss3

[1] 1.307951e-16