EJERCICIO EJEMPLO DE INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE POR FORMULA DE NEWTON.

Conocidos los valores que toma una función f(x) en una serie de puntos dados en el siguiente recuadro:

x (los puntos)	-1,0,2,3
$F(x_i)$ (el valor que adopta la función)	2,4,1,0

Analizando la tabla para que quede más claro→
La función en el punto -1 adopta el valor 2→ f(-1)=2
La función en el punto 0 adopta el valor 4→f(0)=4
…

Cuestiones:
a) Obtener la tabla de diferencias divididas
b) Polinomio interpolador de LaGrange usando fórmulas de Newton.

a) Obtener la tabla de diferencias divididas
Recordemos:
La fórmula de diferencia dividida de orden n de cierta función f en los puntos (x_i, x_{i+1}, x_{i+2},x_{n+3}, …, x_{i+n}) es

$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+n-1}, x_{i+n}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+n}] - f[x_i, \ldots, x_{i+n-1}]}{x_{i+n} - x_i}$$

Y la tabla tendrá esta forma:

X_1	$f(x_1)$	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$	$f[x_1, x_2, x_3, x_4]$
X_2	$f(x_2)$	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$	0
X_3	$f(x_3)$	$f[x_3, x_4]$	0	0
X_4	$f(x_4)$	0	0	0

Siguiendo esta fórmula y la colocando el resultado en nuestra tabla:
f(-1)=2
f(0)=4
f(2)=1
f(3)=0
$f[x_1, x_2]=(f[x_2]-f[x_1]) / x_2-x_1=(4-2)/(0+1)$
$f[x_2, x_3]=(f[x_3]-f[x_2]) / x_3-x_2= (1-4)/(2-0)$
…
$f[x_1, x_2, x_3]=(f[x_2, x_3]-f[x_1-x_2]) / x_3-x_1=(-3/2-2)/(2+1)$
…
$f[x_1,x_2,x_3,x_4]=(f[x_2,x_3,x_4]-f[x_1,x_2,x_3])/(x_4-x_1)$

X_i	$f(x_i)$	$f[x_i,x_{i+1}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2}]$	$f[x_i,x_{i+1},x_{i+2},x_{i+3}]$
x_1=-1	2	$f[x_1,x_2]$=(4-2)/(0+1)=2	$f[x_1,x_2,x_3]$=(-3/2-2)/(2-(-1))=-7/6	(1/6+7/6)/(3+1)=1/3
x_2=0	4	$f[x_2,x_3]$=(1-4)/(2-0)=-3/2	$f[x_2,x_3,x_4]$=(-1-(-3/2))/(3-0)=1/6	
x_3=2	1	$f[x_3,x_4]$=(0-1)/(3-2)=-1		
x_4=3	0			

b) Polinomio interpolador utilizando la fórmula de Newton.

$$p(x) = f(s_1) + \sum_{i=2}^{n} \left(f[s_1, s_2, \ldots, s_i] \prod_{j=1}^{i-1} (x - s_j) \right)$$

Por lo tanto:

$p(x)=f(x_1)+ f[x_1, x_2](X-x_1)+ f[x_1, x_2, x_3](X-x_1)(X-x_2)+ f[x_1, x_2, x_3, x_4]](X-x_1)(X-x_2)(X-x_3)$

Si sustituimos con los valores de la tabla realizada en el apartado a, obtenemos el polinomio interpolador:

$$p(x) = 2 + 2 \cdot (x+1) - \frac{7}{6}(x+1)x + \frac{1}{3}(x+1)x(x-1)$$