Ejercicio de Mínimos Cuadrados

Ajustar los siguientes datos a una parábola empleando para ello el método de mínimos cuadrados.

x	-3	-1	1	3	5	7
f(x)	14	4	2	8	22	44

En primer lugar, obtenemos las derivadas parciales que corresponderán a este ajuste, en el que buscamos obtener una ecuación de segundo grado:

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 2\sum (yj-(a_0+a_1sj+a_2sj^2))(-1)=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 2\sum [(yj-(a_0+a_1sj+a_2sj^2))(-sj)]=0$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = 2\sum [(yj-(a_0+a_1sj+a_2sj^2))(-sj^2)]=0$$

Despejando y separando sumatorios

$$\sum(a_0+a_1sj+a_2sj^2)=\sum yj$$

$$\sum(a_0sj+a_1sj^2+a_2sj^3)=\sum sjyj$$

$$\sum(a_0sj^2+a_1sj^3+a_2sj^4)=\sum sj^2yj$$

Transformando el sistema de ecuaciones a su forma matricial, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} \sum sj^0 & \sum sj^1 & \sum sj^2 \\ \sum sj^1 & \sum sj^2 & \sum sj^3 \\ \sum sj^2 & \sum sj^3 & \sum sj^4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum yj \\ \sum sjyj \\ \sum sj^2yj \end{pmatrix}$$

Calculamos los sumatorios que necesitamos para el ajuste con los datos suministrados:

	sj	sj²	sj³	sj⁴	yj	sj*yj	sj²*yj	n
	-3	9	-27	81	14	-42	126	
	-1	1	-1	1	4	-4	4	
	1	1	1	1	2	2	2	
	3	9	27	81	8	24	72	
	5	25	125	625	22	110	550	
	7	49	343	2401	44	308	2156	
$\sum$	**12**	**94**	**468**	**3190**	**94**	**398**	**2910**	**6**

Sustituyendo estos datos en el sistema anterior, obtenemos:

$$\begin{pmatrix} 6 & 12 & 94 \\ 12 & 94 & 468 \\ 94 & 468 & 3190 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 94 \\ 398 \\ 2910 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} 6a_0 + 12a_1 + 94a_2 = 94 \\ 12a_0 + 94a_1 + 468a_2 = 398 \\ 94a_0 + 468a_1 + 3190a_2 = 2910 \end{cases}$$

Resolveremos el sistema utilizando la Regla de Cramer:

$$\begin{vmatrix} 6 & 12 & 94 \\ 12 & 94 & 468 \\ 94 & 468 & 3190 \end{vmatrix} = 250880$$

$$a_0 = \frac{\begin{vmatrix} 94 & 12 & 94 \\ 398 & 94 & 468 \\ 2910 & 468 & 3190 \end{vmatrix}}{25880} = 2$$

$$a_1 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 94 & 94 \\ 12 & 398 & 468 \\ 94 & 2910 & 3190 \end{vmatrix}}{25880} = -1$$

$$a_2 = \frac{\begin{vmatrix} 6 & 12 & 94 \\ 12 & 94 & 398 \\ 94 & 468 & 2910 \end{vmatrix}}{25880} = 1$$

Finalmente, y sin olvidar que la ecuación deberá ser de la forma **$p_2(x) = a_2x^2 + a_1x + a_0$**, deducimos que la parábola que buscamos es $\boxed{p_2(x) = x^2 - x + 2}$.