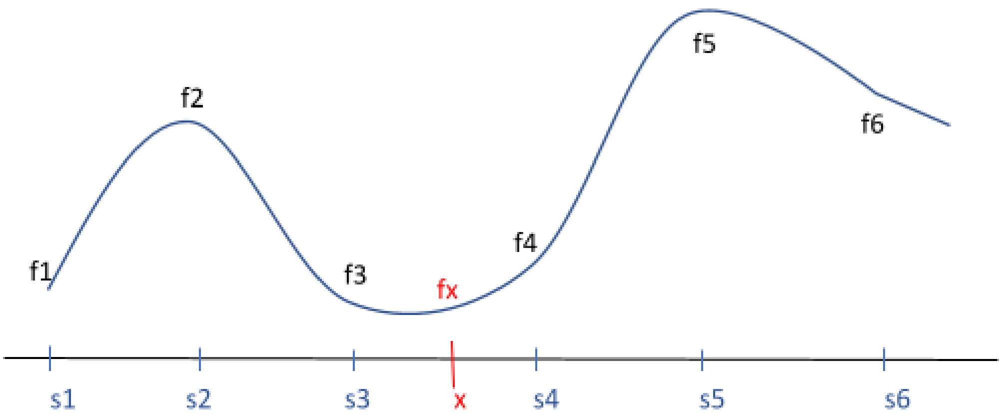
Noviembre, 2021

Interpolación polinómica de Lagrange.

¿Qué es la interpolación?

La interpolación es un método por el que conseguimos estimar el valor de una función en un punto a partir de otros valores dados. Es decir; dados unos determinados puntos a los que llamaremos puntos soporte (s_1, s_2, …, s_n) y los valores que toman en esos puntos, podremos construir una gráfica que pase por los valores y estimar gracias a esta el valor en un determinado punto no dado.



Conociendo s_i, f_i y x, queremos hallar el valor de fx

Interpolación polinómica de Lagrange

Para interpolar según la interpolación polinómica de Lagrange debemos imponer varias condiciones.

- En primer lugar, que la función aproximada f(x) sea polinómica P(x); es decir f(x)=P(x).
- En segundo lugar, que los exponentes de la variable sean números enteros.
  $P(x)=a\,x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$

Podemos obtener el polinomio interpolador mediante tres métodos diferentes:
- Resolviendo el sistema de ecuaciones al que se llega aplicando la definición de interpolación de Lagrange.
- Aplicando la fórmula de Newton y el método de diferencias divididas.
- Empleando polinomios de base de Lagrange.

1 Sistema de ecuaciones

Como hemos dicho, el sistema de ecuaciones viene de aplicar la definición de interpolación de Lagrange, en la que hemos igualado el valor de la función en un punto a un polinomio. Sabemos que $P(x)=a\,x^0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$ Sin embargo no conocemos el valor de esos coeficientes (a) pero sí los valores del punto (x=s) y la función (f) en varios puntos. Por ello generaremos un sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} P(x1)=a + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \ldots + a_n x_1^n = f_1 \\ P(x2)=a + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \ldots + a_n x_2^n = f_2 \\ \end{cases}$$

$P(x3)=a + a_1 x_3 + a_2 x_3^{\,2} + \ldots + a_n x_3^{\,n} = f_3$

2 Fórmula de Newton

Conocemos la fórmula de Newton como P(x)= f[x1]+ f[x1, x2](x-x1) + f[x1, x2, x3](x-x1)(x-x2)+... que podemos expresar genéricamente como:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} A_{i,j} * \prod_{j=1}^{i-1} (x - s_j)$$

Siendo f[xi] las diferencias divididas representadas en la fórmula general por la primera fila de la matriz A; xi=si los puntos soporte conocidos, y n el número de puntos soporte que conocemos.

A partir de aquí procederemos a calcular esas diferencias divididas (para 4 puntos). Las calcularemos mediante una TABLA DE DIFERENCIAS DIVIDIDAS:

s1	f1	$\frac{f2-f1}{s2-s1} = g1$	$\frac{g2-g1}{s3-s1} = h1$	$\frac{h2-h1}{s4-s1}$
s2	f2	$\frac{f3-f2}{s3-s2} = g2$	$\frac{g3-g2}{s4-s2} = h2$	
s3	f3	$\frac{f4-f3}{s4-s3} = g3$		
s4	f4			

3 Polinomios de base

Conocemos la fórmula del polinomio de base de Lagrange como P(x)= f(1) L1(x) + f(2) L2(x)+..... que podemos expresar genéricamente como:

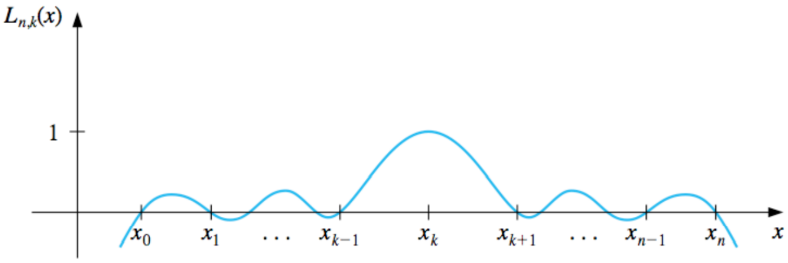
$$P(x) = \sum_{i=0} L_i f(xi) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) + L_2(x)f(x_2) + L_3(x)f(x_3)$$

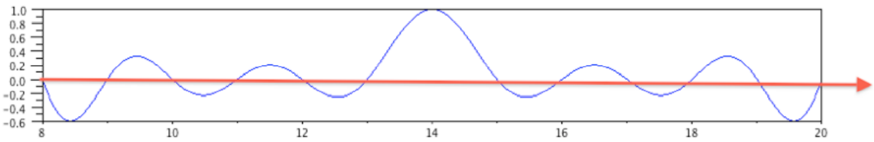
Para ello es imprescindible saber el significado de esa L, que son los polinomios de base de Lagrange.

Si hay por ejemplo dos puntos L1 y L2. En x=1 L1=1 y L2=0. En x=2 L1=0 y L2=1

Si hay tres puntos. En x=1 L1=1 y los demás 0. Así sucesivamente, para que sean polinomios de grado 1 y L1+ L2+ L3…= 1

<u>Representación gráfica L</u>:





En x=14⟶ 1, en los demás puntos=0

Significado de L:

$$\boxed{L_i(x) = \prod_{\substack{p=0 \\ p<>i}}^{n} \frac{x - xp}{xi - xp}}$$

RESUMEN DE POLINOMIO DE BASE:

$$P(x) = L_0(x)f(x_0) + L_1(x)f(x_1) = \frac{x - x_1}{x_0 - x_1}f(x_0) + \frac{x - x_0}{x_1 - x_0}f(x_1).$$

- Este polinomio lineal cumple las propiedades que requerimos

$$P(x_0) = 1 \cdot f(x_0) + 0 \cdot f(x_1) = f(x_0) = y_0$$

$$P(x_1) = 0 \cdot f(x_0) + 1 \cdot f(x_1) = f(x_1) = y_1.$$

EJEMPLO. Se conoce la concentración de una sustancia para ciertos instantes de tiempo, según la tabla. Estimar la concentración para t=3 min, aplicando los tres métodos.

tiempo (min)	0	2	5
concentración (g/l)	15	25	12

1) Definición de Lagrange (sistema de ecuaciones).

Como hay tres puntos, el polinomio será de grado 2 o inferior.

$p(x) = a + bx + cx^2$

$$\left.\begin{array}{ll} p(0) = 15 & a = 15 \\ p(2) = 25 & a + 2b + 4c = 25 \\ p(5) = 12 & a + 5c + 25c = 12 \end{array}\right\} \begin{array}{ll} & \\ 2b + 4c = 10 & 10b + 20c = 50 \\ 5b + 25c = -3 & 10b + 50c = -6 \end{array}$$

-30c = 56 -> c = -28/15

5b - 140/3 = -3 ; 5b = 140/3 - 9 = 131/3 -> b = 131/15

$p(x) = 15 + 131/15x - 28/15\ x^2$

p(3) = 15 + 131/15*3 - 28/15*9 = 15 + 26.2 - 16.8 = 24.4 g/l

2) Fórmula de Newton.

Tabla de diferencias divididas:

0	15	$\frac{25-15}{2-0}$ = 5	$\frac{-13/3-5}{5-0}$ = -28/15
2	25	$\frac{12-25}{5-2}$ = -13/3	
5	12		

p(x) = 15 + 5(x - 0) - 28/15(x - 0)(x - 2)

p(3) = 15 + 5*3 - 28/15*3*1 = 15 + 15 - 5.6 = 24.4 g/l

3) Polinomios de base de Lagrange.

$p(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$

$L_1(x) = \frac{(x-2)(x-5)}{(0-2)(0-5)} = \frac{(x-2)(x-5)}{10}$

$L_2(x) = \frac{(x-0)(x-5)}{(2-0)(2-5)} = \frac{(x-0)(x-5)}{-6}$

$L_3(x) = \frac{(x-0)(x-2)}{(5-0)(5-2)} = \frac{(x-0)(x-2)}{15}$

$p(x) = 15\frac{(x-2)(x-5)}{10} + 25\frac{(x-0)(x-5)}{-6} + 12\frac{(x-0)(x-2)}{15}$

$p(3) = 15\frac{1*(-2)}{10} + 25\frac{3*(-2)}{-6} + 12\frac{3*1}{15}$ = -3 + 25 + 2.4 = 24.4 g/l

Metainformación

Tema	Tiempo	Tipo	Destinatario
Algoritmia Interpolación de Lagrange	Noviembre, 2021	Resumen condensado de repaso con un ejemplo	Alumno que necesita repasar interpolación o no ha cogido bien los conceptos básicos