MÍNIMOS CUADRADOS

Caso no lineal: polinomios de grado mayor que uno

ÍNDICE

BIOTECNOLOGÍA GRUPO T12

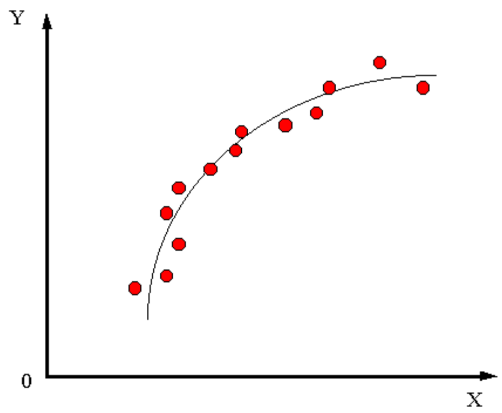
2021-2022

Si has terminado de leer el caso lineal (para polinomios de grado uno) y lo has entendido ¡genial! Pero… ¿Y los polinomios de grado mayor que uno? Pues vamos a verlo.

1. Primeros pasos

Imaginemos una gráfica con un montón de puntos y lo que queremos es crear un polinomio (lo llamaremos aproximador) que esté lo más ajustado posible a todos los puntos del gráfico. Eso es lo que vamos a hacer.

Te dejo una imagen para que te hagas a la idea:



El polinomio que crearemos será algo así como esto

m representa tanto el grado del polinomio como el número de coeficientes.

$$P(x)= a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_mx^m$$

Este se puede resumir en un sumatorio, tal que

$$p(x)=\sum a_k x^k \text{ , k=0,n.}$$

Además, la función que estaremos implementando será

$$f(p(x)) = \sum_{j=1}^{n} [y_j - p(x)]^2$$

2. Minimizar la función

Una vez tenemos la función a minimizar comenzamos a derivar, recordad que son derivadas parciales y obtendremos una ecuación derivada por cada coeficiente.

$$\frac{\partial f}{\partial a_0} = 2\sum_{j=1}^{n} [y_j - p(x)]^* (-1) = 0$$

número de puntos

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j = a_0 \cdot n + a_1 \sum_{j=1}^{n} s_j + a_2 \sum_{j=1}^{n} s_j^2 + \ldots + a_m \sum_{j=1}^{n} s_j^m$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_1} = 2\sum_{j=1}^{n} [y_j - p(x)]^* (-s_j) = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j s_j = a_0 \sum_{j=1}^{n} s_j + a_1 \sum_{j=1}^{n} s_j^2 + a_2 \sum_{j=1}^{n} s_j^3 + \ldots + a_m \sum_{j=1}^{n} s_j^{m+1}$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_2} = 2\sum_{j=1}^{n} [y_j - p(x)]^* (-s_j)^2 = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j s_j^2 = a_0 \sum_{j=1}^{n} s_j^2 + a_1 \sum_{j=1}^{n} s_j^3 + a_2 \sum_{j=2}^{n} s_j^4 + \ldots + a_m \sum_{j=1}^{n} s_j^{m+2}$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial f}{\partial a_m} = 2\sum_{j=1}^{n} [y_j - p(x)]^* (-s_j)^m = 0$$

$$\hookrightarrow \sum_{j=1}^{n} y_j s_j^m = a_0 \sum_{j=1}^{n} s_j^m + a_1 \sum_{j=1}^{n} s_j^{m+1} + a_2 \sum_{j=1}^{n} s_j^{m+2} + \ldots + a_m \sum_{j=1}^{n} s_j^{m+m}$$

A continuación, crearemos la operación matricial que contendrá:

1) **Matriz datos:** tendrá las dimensiones (m+1)x(m+1) en la que pondremos todos los valores de la derecha del igual.

$$\begin{pmatrix} n & sx & sx2 & sxm \\ sx & sx2 & sx3 & sx(m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ sxm & sx(m+1) & sx(m+2) & sx(m+m) \end{pmatrix}$$

2) **Vector incógnitas:** formado por todos los coeficientes.

$$\begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(m) \end{pmatrix}$$

3) **Vector resultados:** introduciremos los valores de la izquierda del igual.

$$= \begin{pmatrix} sy \\ sxy \\ \vdots \\ sxmy \end{pmatrix}$$

Y si lo juntamos:

3. Ecuación matricial

$$\begin{pmatrix} n & sx & sx2 & sxm \\ sx & sx2 & sx3 & sx(m+1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ sxm & sx(m+1) & sx(m+2) & sx(m+m) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ \vdots \\ a(m) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} sy \\ sxy \\ \vdots \\ sxmy \end{pmatrix}$$

Solo nos quedaría sustituir los valores de la tabla del ejercicio en las matrices.

4. Ejemplo

Ejercicio

Se consideran los puntos (0.2,-2), (0.9,1.2), (1.9,0.12), (1.7,3.6), (2.1,1) y (1.1,2), obtener un polinomio de segundo grado, que sea el ajuste por mínimos cuadrados de dichos puntos.

-Primero rellenamos los datos de la tabla

	Sj	Sj^2	Sj^3	Sj^4	Yj	Sj*yj	Sj2*yj
	0.2	0.04	0.008	0.0016	-2	-0.4	-0.08
	0.9	0.81	0.531	0.4304	1.2	1.08	0.972
	1.9	3.61	6.859	13.0321	0.12	0.228	0.4332
	1.7	2.89	4.913	8.3521	3.6	6.12	10.404
	2.1	4.41	9.261	19.4481	1	2.1	4.41
	1.1	1.21	1.331	1.4641	2	2.2	2.42
Sumatorio	7.9	12.97	22.903	42.7284	5.92	11.328	18.5592

- *Montamos la matriz con todos los datos de la tabla obtenidos:*

$$\begin{pmatrix} 6 & 7{'}9 & 12{'}97 \\ 7{'}9 & 12{'}97 & 22{'}903 \\ 12{'}97 & 22{'}903 & 42{'}7284 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a(0) \\ a(1) \\ a(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5{'}92 \\ 11{'}328 \\ 18{'}5592 \end{pmatrix}$$

Matriz datos

Vector incógnitas

Vector resultados

- *Desarrollamos el sistema de ecuaciones y resolvemos:*

$$\left.\begin{aligned} 6a_0 + 7{'}9a_1 + 12{'}97a_2 &= 5{'}92 \\ 7{'}9a_0 + 12{'}97a_1 + 22{'}903a_2 &= 11{'}328 \\ 12{'}97a_0 + 22{'}903a_1 + 42{'}7284a_2 &= 18{'}5592 \end{aligned}\right\}$$

$$a_0 = -2{'}0832 \qquad a_1 = 4{'}8360 \qquad a_2 = -1{'}5254$$

- *Resultado:*
  P(x)=-2,0832+4,8360x-1,5254x2