# Interpolación polinómica de Lagrange

## Definición de interpolación

Método de aproximación que permite encontrar un polinomio que interpola un conjunto de puntos. Este polinomio permitirá conocer el valor aproximado de la función g)x) en cualquier punto x conociendo otros puntos.

## Polinomio de Lagrange

Un polinomio surge de la suma de monomios. El grado del polinomio resultante será la cantidad de puntos dados menos uno.

Por ejemplo, si conocemos dos puntos, el polinomio resultante será una recta.

Si se conocen una serie de puntos (xi, yi), se puede hallar una función g(x) que verifique g(xi)=f(xi).

$$g\left(x\right)=p\left(x\right)=a\_{1}+a\_{2}x+a\_{3}x^{2}+a\_{4}x^{3}…+a\_{n}x^{n-1}$$

### METODO 1

El primer método estudiado es la obtención de los coeficientes mediante un sistema de ecuaciones.

Se elabora una matriz con los puntos del soporte dado (xi), elevándolos a exponentes crecientes hasta llegar a n-1. El algoritmo para determinar esta matriz sería $X\left[ij\right]=x\_{i}^{j-1}$.



X=

La matriz incógnita, que tendrá tantas columnas como filas tenga la matriz X, corresponde a los coeficientes del polinomio, a la que llamaremos A.

La matriz que resulta del producto de ambas corresponde a los valores que toma la función en cada punto.



F=

Por tanto, el sistema de ecuaciones a plantear es X·A=F.

**Ejemplo**

**La presión de un gas es conocida en ciertos puntos, y queremos estudiarla en el punto x=1,5.**

**P1(1,100), P2(3,200).**

El grado en este caso es uno, porque hay dos puntos diferentes, por lo que la función no es una constante.

$g\left(x\right)=a+bx$.

Si sustituimos en l ecuación con los dos puntos dados, obtenemos un sistema de ecuaciones.

$$a+b=100$$

$$a+3b=200$$

Por reducción:

$$2b=100;b=50\rightarrow a=50$$

Entonces, sustituyendo y sacando fator común, obtenemos que el polinomio interpolador es:

 $$g\left(x\right)=50+50x\rightarrow g\left(x\right)=50\left(1+x\right)$$

Con esto, podemos saber el valor de la función en x=1,5.

$$g\left(1,5\right)=50\left(1+1,5\right); g\left(1,5\right)=125$$

f, x, n

i=1, n, 1

Li=1

j=1, n, 1

j≠i

Li=Li·(x-xj)/(x1-x2)

P=0

i=1, n, 1

P=P+fi·Li

P

### METODO 2

El segundo método que hemos aprendido es el de polinomios de base de Lagrange.

Partimos de la fórmula

$$p\left(x\right)=\sum\_{i=1}^{n}f\_{i}·L\_{i}(x)$$

siendo $L\_{i}(x)$ los polinomios base de Lagrange.

Los polinomios base se calculan de la siguiente manera:

$$L\_{i}(x)=\prod\_{\begin{array}{c}i=1\\j=1\\j\ne i\end{array}}^{n}\frac{x-x\_{j}}{x\_{i}-x\_{j}}$$

La j es un índice que varía y es cualquier número distinto de i.

Li (x) tiene que verificar lo siguiente:

$$L\_{i}\left(x\_{i}\right)=1, L\_{i}(x\_{j})=0$$

### MÉTODO 3

El tercer y último método usado para la interpolación es la fórmula de Newton y las diferencias divididas.

La fórmula de Newton define el polinomio como:

$$p\left(x\right)=f\_{1}\sum\_{i=0}^{n}(\prod\_{j=1}^{i-1}f\left[x\_{1}.x\_{2}·…·x\_{n}\right]·(x-x\_{j}))$$

Para obtener el polinomio interpolador a partir de la fórmula de Newton, entran en juego las diferencias divididas. Para ello, construiremos la siguiente tabla:

|  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Soporte | Función | Orden 1 | Orden 2 | Orden 3 | Orden n-1 |
| X1 | f1 | f[x1,x2] | f[x1,x2, x3] | f[x1,x2, x3, x4] | f[x1,x2, x3, x4, xn] |
| X2 | f2 | f[x2,x3] | f[x2,x3, x4] | f[x2,x3, x4, xn] | - |
| X3 | f3 | f[x3,x4] | f[x3,x4, xn] | - | - |
| X4 | f4 | f[x4,xn] | - | - | - |
| Xn  | fn  | - | - | - | - |

A continuación, os explicamos cómo calcular las diferentes columnas de la tabla. Para hacerlo de manera aclarativa, se usarán los subíndices de la primera fila, pero lo mismo se puede aplicar a las otras filas.

**Orden 0**

$f\left[x\_{1}\right]=f\left(x\_{1}\right)=f\_{1}$

**Orden 1**

$f\left[x\_{1},x\_{2}\right]=\frac{f\_{2}-f\_{1}}{x\_{2}-x\_{1}}$

**Orden 2**

$f\left[x\_{1},x\_{2},x\_{3}\right]=\frac{f\left[x\_{2},x\_{3}\right]-f[x\_{1},x\_{2}]}{(x\_{3}-x\_{1})}$

**Orden 3**

$f\left[x\_{1},x\_{2},x\_{3},x\_{4}\right]=\frac{f\left[x\_{2},x\_{3},x\_{4}\right]-f[x\_{1},x\_{2},x\_{3}]}{(x\_{4}-x\_{1})}$

**Orden n-1**

$f\left[x\_{1},x\_{2},x\_{3},x\_{4},x\_{n}\right]=\frac{f\left[x\_{2},x\_{3},x\_{4},x\_{n}\right]-f[x\_{1},x\_{2},x\_{3},x\_{4}]}{(x\_{n}-x\_{1})}$

Como vemos, cada casilla usa la casilla a su izquierda y la inmediatamente inferior.

Este es el método más cómodo para obtener el polinomio interpolador de la función dado un soporte y los valores de la función en dichos puntos.

Para elaborar el algoritmo que nos permita obtenerlo, debemos tener claros una serie de puntos:

* Sólo aparecen en el polinomio los valores de la primera fila de la tabla, pero debemos calcularlo todos porque son necesarios para ir rellenando la tabla.
* El grado del polinomio siempre es una unidad menor que el número de puntos del soporte, a no ser que haya dos iguales (será menor).
* Se necesitará elaborar una matriz que almacene los valores de la tabla antes de elaborar el polinomio de Newton.

La matriz a almacenará los valores f en el mismo orden y posición que la tabla que tenéis arriba. Para construirla serán necesarios dos vectores: el vector X (con los puntos del soporte), y el vector F (con los valores de la función).

En la primera columna encontramos los elementos del vector F. Las demás celdas se calcularán de la siguiente manera:

$$A\left[i,j\right]=\frac{A\left[i+1, j-1\right]-A[i, j-1]}{X\left[i+j-1\right]-X[i]}$$

cuando $i=1, n-j+1$ y $j=2, n$.

Entonces el organigrama para obtener la matriz A es:

f, x, n

A=0

i=1,n

A[1, i]=f[i]

j=2,n

i=1, n-j+1

$$A\left[i,j\right]=\frac{A\left[i+1, j-1\right]-A[i, j-1]}{X\left[i+j-1\right]-X[i]}$$

Una vez tenemos la matriz A, obtendremos el polinomio.

En el siguiente algoritmo hemos introducido el valor t, que es el punto en el que queremos conocer el valor de la función.

A, f, x, n, t

P=0

i=2,n

j=1, i-1

Sum=A[1,i]\*Prod

Prod=1

Prod=Prod\*(t-x[j])

P=f[1]+Sum