EJERCICIOS DE INTEGRACIÓN

EJERCICIO DE INTEGRACIÓN POR GAUSS:

Resolver la integral de manera aproximada mediante una fórmula de Gauss utilizando 3 puntos:

$$\int_{1}^{2} e^{x} \cdot sen(x)\ dx$$

DATOS:

Intervalo [-1,1] que vamos a asemejar a [alfa,beta]

Wi (coeficientes)	Z (puntos)
5/9	-(⅗)^(½)
8/9	0
5/9	(⅗)^(½)

NOTA: no confundir los límites de integración, con el intervalo en el que estamos trabajando.

1.Hacemos la transformación: x=mz + n
1= -m + n
2= m + n

2.Obtenemos que n=3/2 y m=½ de manera que x=½z + 3/2 y dx=½ dz.

3.Sustituimos por z para obtener los valores de x y obtenemos los valores de ci multiplicando m por wi:

X	½(-(⅗)^(½) +3)	3/2	½((⅗)^(½) +3)
C	5/18	8/18	5/18

4.Realizamos para resolver la integral el siguiente sumatorio:

$$\int_{1}^{2} e^{x} \cdot sen(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} m \cdot w_i \cdot f(z_i)$$

Nuestra i es x1 que va hasta x3, con un incremento de x3.

RESULTADO: 3,9

Ahora vamos a realizarlo con el mismo intervalo, los mismos límites de integración y la misma integral pero utilizando dos puntos como soporte:

Wi (coeficientes)	Z (puntos)
-1	-(⅓)^(½)
1	(⅓)^(½)

1.Hacemos la transformación: x=mz + n
1= -m + n
2= m + n

2.Obtenemos que n=3/2 y m=½ de manera que x=½z + 3/2 y dx=½ dz.

3.Sustituimos por z para obtener los valores de x y obtenemos los valores de ci multiplicando m por wi:

X	-1+(3)^(½)/ 2^(½)	1+(3)^(½)/ 2^(½)
C	-1/2	1/2

4.Realizamos para resolver la integral el siguiente sumatorio:

$$\int_1^2 e^x \cdot sen(x)\,dx \simeq \sum_{i=1}^{n} m \cdot w_i \cdot f(z_i)$$

Nuestra i es x1 que va hasta x2, con un incremento de 2*x2.

RESULTADO: 1,3484

Gauss es un método de integración polinómica exacto para polinomios de grado 2n+1; ¿pero cómo resolvemos mediante la aproximación, una función que no es polinómica? Podemos aplicar Gauss, como hemos hecho, pero no obtendremos su valor exacto, por lo tanto aunque integremos con los mismos límites, obtendremos distintos resultados al usar soportes distintos. No obstante, podemos sacar la conclusión de que a mayor números de puntos en la integración de funciones, mayor precisión pues el valor real de la integral es 4,48756.

EJERCICIO DE INTEGRACIÓN POR FÓRMULAS:

Sea la función $f(x) = x^3 + 2x^2 - 1$, se desea aproximar $\int_0^2 f(x)dx$ mediante:

a) Fórmula del punto medio
b) Fórmula del trapecio
c) Fórmula de Simpson

y comparar con el valor exacto.

Sabemos que $b = 2\ y\ a = 0$ por los límites de integración, por lo tanto, solo debemos aplicar las fórmulas teniendo en cuenta dichos límites:

a) $f(\frac{a+b}{2})\cdot(b - a) \Rightarrow [\left(\frac{2}{2}\right)^3 + \left(\frac{2}{2}\right)^2\cdot 2 - 1]\cdot 2 = 4$
$E = 7,3 - 4 = 3,3$

b) $\frac{f(a)-f(b)}{2}\cdot(b - a) \Rightarrow \frac{-1+8+8-1}{2}\cdot 2 = 14$
$E = 14 - 7,3 = 6,7$

c) $\frac{b-a}{6}\cdot(f(a) + 4f(\frac{a+b}{2}) + f(b)) = \frac{2}{6}\cdot(-1 + 4\cdot 2 + 15) = 7,3$
$E = 7,3 - 7,3 = 0$

Para hallar la fórmula de Simpson, es necesario emplear el polinomio con diferencias divididas, de manera que se va simplificando la expresión hasta alcanzar la fórmula general. Llamaremos h al intervalo que hay entre a y b.

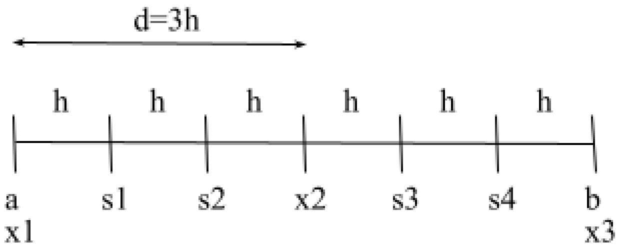
a	$f(a)$	$\frac{f(a)-f(\frac{a+b}{2})}{\frac{b-a}{2}}$	$\frac{f(a)-2f(\frac{a+b}{2})+f(b)}{2a^2}$
$\frac{a+b}{2}$	$f(\frac{a+b}{2})$	$\frac{f(\frac{a+b}{2})-f(b)}{\frac{b-a}{2}}$	
b	$f(b)$		

$$\int_a^b f(x)dx \Rightarrow p(x) = f(a) + f[a,\tfrac{a+b}{2}]\cdot(x - a) + f[a,\tfrac{a+b}{2}, b]\cdot(x - a)\cdot(x - \tfrac{a+b}{2})$$

EJERCICIO DE INTEGRACIÓN POR NEWTON-COTES:

Obtener una fórmula de Newton-Cotes compuesta y abierta con dos puntos de soporte empleando 2 subintervalos y aplicarla a la integral: $\int_1^4 (x^3 + 3x^2 - 1)dx$

En primer lugar, realizamos un diagrama que muestre el planteamiento del ejercicio.



A continuación, planteamos la fórmula general.

$$\int_b^a f(x)dx \simeq \frac{b-a}{2}\cdot(f(s_1) + f(s_2))$$

Sin embargo, desconocemos los valores empleados en la fórmula, por lo que debemos hallarlos:

$$s_1 = a + h = a + \frac{d}{3}$$
$$s_2 = a + 2h = a + \frac{2d}{3}$$
$$s_3 = a + 4h = a + \frac{4d}{3} = x_2 + \frac{d}{3}$$
$$s_4 = x_2 + \frac{2d}{3}$$

Donde $x_2 = \frac{a+b}{2}$

Al emplear el parámetro d, estamos dividiendo el intervalo a-b en dos subintervalos, por lo que los definimos:

$$\int_a^b I_1 = \frac{x_2 - a}{2}\cdot f(a + \frac{d}{3}) + f(a + \frac{2d}{3})$$

$$\int_a^b I_2 = \frac{b - x_2}{2}\cdot f(x_2 + \frac{d}{3}) + f(x_2 + \frac{2d}{3})$$

La integral que buscamos es: $I = I_1 + I_2$

Por último, basta con aplicar los valores que aporta el enunciado (la fórmula y los límites de integración) en el planteamiento realizado.

Solución: $I = \frac{3}{4} \cdot (f(\frac{3}{2}) + f(2) + f(3) + f(\frac{7}{2})$

Al ser una fórmula compuesta, mejora la precisión con respecto a la fórmula Newton-Cotes simple.