FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN NUMÉRICA DE TIPO INTERPOLATORIO (FINTI)

INTRODUCCIÓN

La integración sirve fundamentalmente para calcular áreas. Algunas de sus aplicaciones son:

- Hallar el área de una superficie
- Calcular la masa de una sustancia a partir de la concentración dada
- Calcular el trabajo que realiza una fuerza
- Calcular volúmenes de revolución
- Calcular longitudes
- Hallar momentos de inercia

Se usa cuando:

- Conocemos valores puntuales (discretos) y queremos calcular una integral
- La función a integrar es complicada o no necesitamos obtener un valor exacto.
- No existe ningún método exacto para resolver la integral. Como en $I = \int_a^b e^{-x^2}\, dx$

En estos casos, obtenemos fórmulas de aproximación de las integrales.
Para ello interpolamos e integramos el polinomio interpolador.

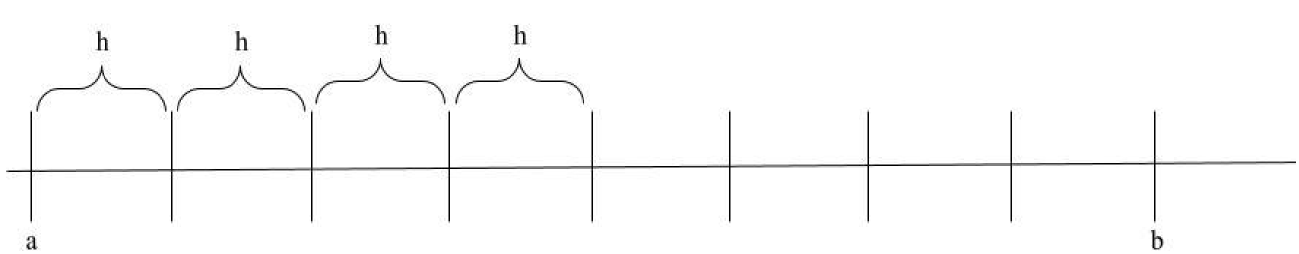
$$\int_a^b f(x)\, dx \approx \int_a^b p(x)\, dx = \sum_{i=1}^{n} cif(x_i)$$

Siendo p(x) el polinomio interpolador de f(x) sobre el soporte $\{x_i\}_{i=1}^{n}$

FÓRMULAS DE NEWTON-COTES

Son fórmulas de tipo interpolatorio que emplean un soporte equidistante. Pueden ser:

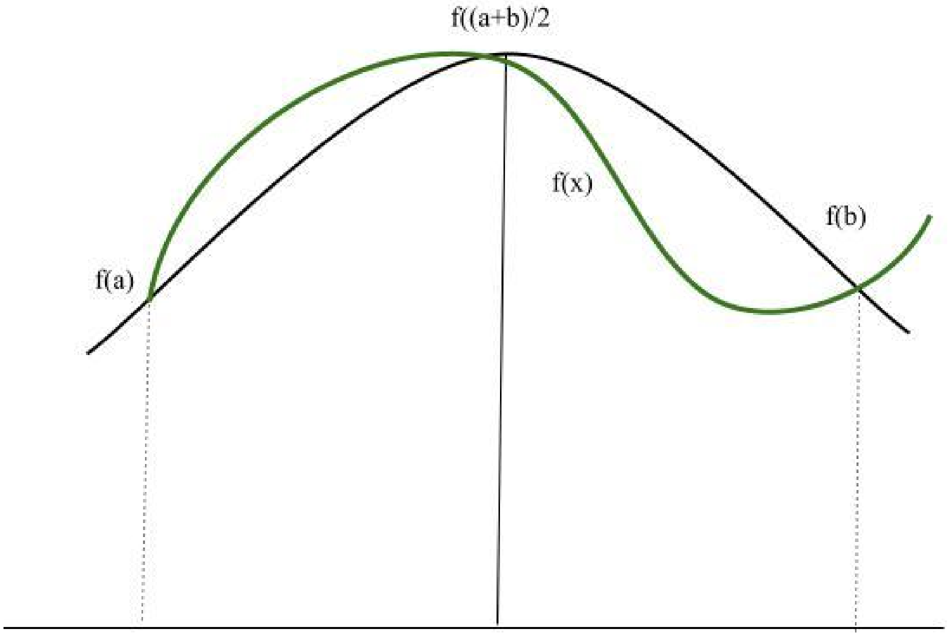
- **Cerradas**: incluyen los extremos en el soporte
- **Abiertas**: no incluyen los extremos en el soporte



Si el soporte es de (n+1) puntos, las fórmulas de Newton-Cotes son exactas para los polinomios de grado ≤ n (salvo excepciones como Simpson: n+1).
h= (b-a)/n. n es el número de subintervalos.

FÓRMULAS DE SIMPSON
Es una FINTI con 3 puntos de soporte: los extremos del intervalo y el punto medio.

Esta fórmula es exacta para polinomios de grado <=3. Pero si los 3 puntos no son equidistantes (no se llama de Simpson) es exacta para polinomios de grado <=2



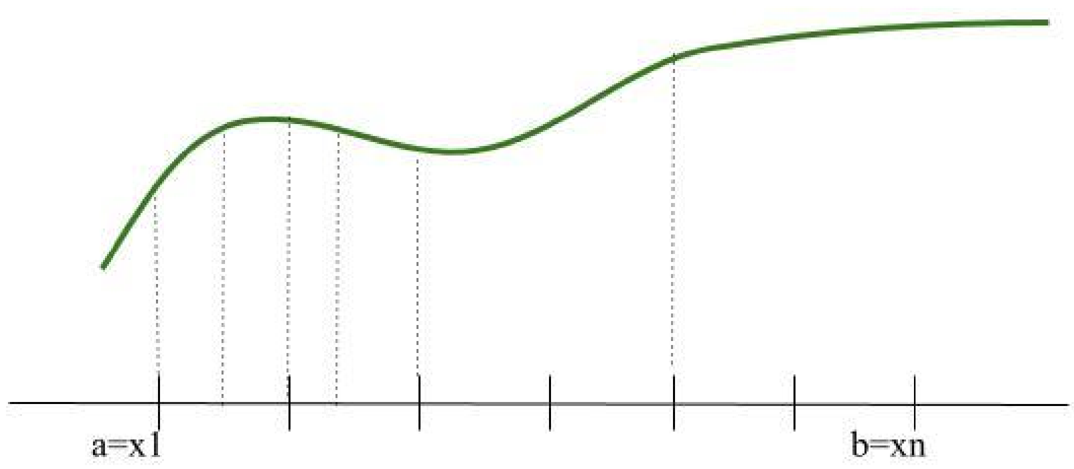
x1= a; x2= (a+b)/2; x3= b
c1=(b-a)/6 ; c2= 4(b-a)/6; c3=(b-a)/6
c se refiere a las secciones en las que dividimos la función.

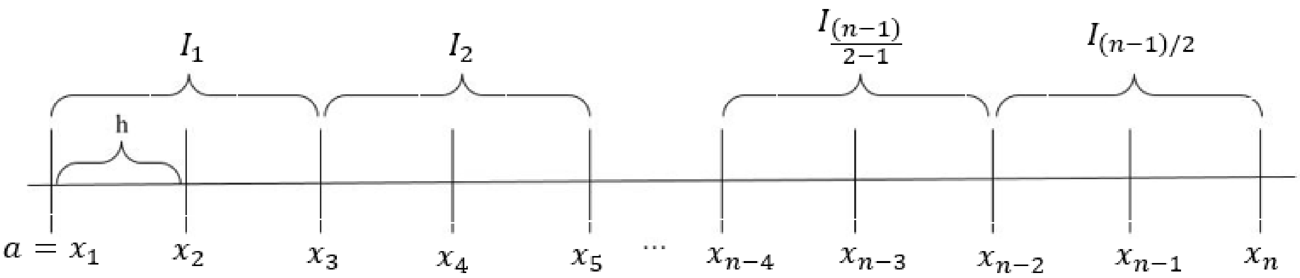
$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \int_a^b p(x)\,dx = \int_a^b \left(f(a) + f\left[a, \tfrac{a+b}{2}\right](x-a) + f\left[a, \tfrac{a+b}{2}, b\right](x-a)\left(x - \tfrac{a+b}{2}\right)\right) dx =$$

$$\frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right]$$

FÓRMULA DE SIMPSON COMPUESTA

Las FINTI compuestas la función tiene varios puntos de soporte que dividimos en subintervalos equidistantes.





$$x_2 = x_1 + {}^{h}/_{2}$$

$$x_4 = x_3 + {}^{h}/_{2}$$

h=(b-a)/n

n es el número de subintervalos, que puede ser par o impar

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \frac{h}{6}(a) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2) + f(x_2) + 4f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) +$$

$$f(f(x_3) + f(x_{n-1}) + 4f\left(\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f(x_n)\right)$$

$$= \frac{h}{6}\left(f(a) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + 4\sum_{i=1}^{h-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + f(h) \right)$$