SEGUNDO PARCIAL 2019-2020

EJERCICIO 1

En una planta de producción de propanol se ha obtenido la siguiente producción total en función del tiempo:

t(horas) 3 5 15 25 35 50

f (litros) 8 12 30 35 40 100

A) Se desea obtener la cantidad producida transcurridas: (a) 4 horas y (b) 40 horas. Para ello, se realizará una interpolación polinómica de Lagrange a trozos formada por un polinomio de grado 3 en el intervalo [3,25] y otro de grado 2 en el intervalo [25,50].

B) Obtener, para la función del apartado A), la función de base asociada al 4º punto del soporte (25 horas) y representarla gráficamente.

C) Considerando ahora los siguientes datos (con h>0)

x -h 0 2h

y(x) 2 4 10

aproximar $\int_{-h}^{2h} y(x)dx$

mediante una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio con soporte {-h,0,2h}.

SOLUCIÓN:

Apartado A)

Tramo [3,25]:

p(t) = f(3)+f[3,5](t-3)+f[3,5,15](t-3)(t-5) f[3,5,15,25](t-3)(t-5)(t-15)

t_0 = 3 8 2 0.016 0.002196

t_1 = 5 12 1.8 0.065

t_2 = 15 30 0.5

t_3 = 25 35

p(4) = 8+2(4-3)-0.016(4-3)(4-5)-0.002196(4-3)(4-5)(4-15) = 9.9925

Tramo [25,50]:

p(t) = f(25)+f[25,35](t-25)+f[25,35,50](t-25)(t-35)

t_0 = 25 35 0.5 0.14

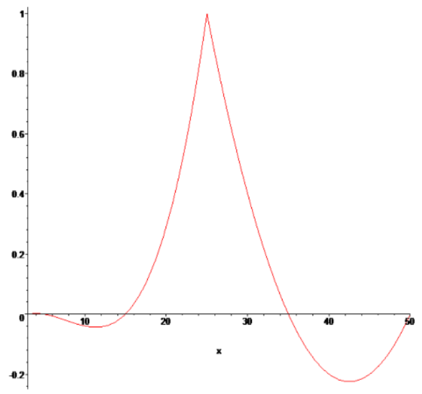
t_1 = 35 40   4

t_2 = 50 100

p(40) = 35+0.5(40-25)+0.14(40-25)(40-35) = 53

Apartado B)

$$\varphi_4 = \begin{cases} \dfrac{(x-3)(x-5)(x-15)}{4400} & 3<x \text{ y } x<25 \\ \dfrac{(x-35)(x-50)}{250} & 25<x \text{ y } x<50 \end{cases}$$



Apartado C)

-h   2 $\frac{2}{h}$ $\frac{1}{3h^2}$

0   4 $\frac{3}{h}$

2h 10

$$p(x) = 2 + \frac{2}{h}(x+h) + \frac{1}{3h^2}x(x+h) = 4 + \frac{7}{3h}x + \frac{1}{3h^2}x^2$$

$$\int_{-h}^{2h} y(x)dx \approx \int_{-h}^{2h} p(x)dx = \int_{-h}^{2h}\left(4 + \frac{7}{3h}x + \frac{1}{3h^2}x^2\right)dx = 4(3h) + \frac{9}{2}h = \frac{33h}{2} = 16.5h$$

EJERCICIO 2

Se considera un vector AUX que contiene N valores cada uno de los cuales es un número del conjunto {0,1,2,3,4}. Se desea realizar un algoritmo que realice las siguientes operaciones:

1) Se genere un vector denominado CADENA de N valores, cada uno de los cuales tendrá asignado uno de los siguientes caracteres:

‘A’ si el elemento de AUX vale 0

‘C’ si el elemento de AUX vale 1

‘G’ si el elemento de AUX vale 2

‘T’ si el elemento de AUX vale 3 ó 4

(donde A representa Adenina, C, Citosina, G, Guanina y T, Timina)

2) Se cuenten las veces que aparecen los valores A, C, G, T, almacenando en un vector Q de 4 componentes la cantidad total de cada uno de los valores A, C, G, T, respectivamente.

3) Se obtengan las variables PUR y PIR que contendrán, respectivamente, los porcentajes de bases púricas (elementos iguales a ‘A’ más elementos iguales a ‘G’) y el porcentaje de bases pirimidínicas (elementos iguales a ‘C’ más elementos iguales a ‘T’) presentes en la cadena.

EJEMPLO ACLARATORIO:

N=10; AUX=(1, 0, 2, 0, 1, 0, 3, 3, 2, 4) (son datos)

1) Obtenemos: CADENA=(‘C’, ‘A’, ‘G’, ’A’, ‘C’, ‘A’ ,’T’, ‘T’, ‘G’, ‘T’)

2) Obtenemos: Q=(3,2,2,3)

3) Obtenemos: PUR=50; PIR=50

SOLUCIÓN:

Inicio pseudo-código

```
Leer N, AUX
Q=0
i=1
Mientras (i<=N) hacer
  Si (AUX(i)==0) entonces
    CADENA(i)=’A’; Q(1)=Q(1)+1
  Si no, si (AUX(i)==1) entonces
    CADENA(i)=’C’; Q(2)=Q(2)+1
  Si no, si (AUX(i)==2) entonces
    CADENA(i)=’G’; Q(3)=Q(3)+1
```

```
  Si no
    CADENA(i)=’T’; Q(4)=Q(4)+1
  Fin condición
  I=i+1
Fin bucle
Mientras (i<=n) hacer
  Si (CADENA(i)=='A' or CADENA(i)=='G')
    PUR=PUR+1
  Si no
    PIR=PIR+1
  Fin condición
  i=i+1
Fin bucle
PUR=PUR/N*100
PIR=PIR/N*100
Escribir PUR, PIR

Fin pseudo-código
```

EJERCICIO 3

Se desea ajustar la función y(t) = a + $\frac{b}{t+1}$ a n puntos de coordenadas (t_i, y_i), i =1,…,n, utilizando el criterio de mínimos cuadrados. Se pide:

a) Deducir la EXPRESIÓN MATRICIAL del sistema de ecuaciones cuya solución conduce a la obtención de los parámetros a y b de la función y(t).

b) Realizar un algoritmo para obtener la matriz A de coeficientes del sistema obtenido en el apartado a) y un vector V que contenga los términos independientes.

SOLUCIÓN:

a) La suma de los cuadrados de las distancias de los puntos dados a la curva y(t) es:

$$D=\sum_{i=1}^{n} d_i^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-\frac{b}{t_i+1}\right)^2$$

Para que D sea mínima, se debe cumplir:

$$\frac{\partial D}{\partial a}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-\frac{b}{t_i+1}\right)=0 \quad\Rightarrow\quad na+b\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+1}\right)=\sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$\frac{\partial D}{\partial b}=-2\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-a-\frac{b}{t_i+1}\right)\frac{1}{t_i+1}=0 \quad\Rightarrow\quad a\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{t_i+1}+b\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+1}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{1}{t_i+1}\right)$$

En forma matricial:

$$\begin{pmatrix} n & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+1}\right) \\ \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+1}\right) & \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{t_i+1}\right)^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n}\left(y_i\frac{1}{t_i+1}\right) \end{pmatrix}$$

Inicio pseudo-código

```
Leer t,y,n
A(1,1)=n
suma1=0; suma2=0; suma3=0; suma4=0
Para i = 1:n
  suma1=suma1+1/(t(i)+1)
  suma2=suma2+1/(t(i)+1)^2
  suma3=suma3+y(i)
  suma4=suma4+y(i)/(t(i)+1)
Fin bucle
A(1,2)=suma1; A(2,1)=A(1,2); A(2,2)=suma2; V(1)=suma3; V(2)=suma4
```

Fin pseudo-código