INTERPOLACIÓN POR TRAMOS. (polinomios de base) → tb por diferencias divididas

1^{er} grado

$$\varphi_1(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2} & x\in[x_1,x_2]\\ 0 & \notin[x_1,x_2]\end{cases}\qquad \varphi_n(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & x\in[x_{n-1},x_n]\\ 0 & x\notin[x_{n-1},x_n]\end{cases}$$

$i=2,n-1$

$$\varphi_i(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}} & x\in[x_{i-1},x_i]\\ \dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in[x_i,x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[x_{i-1},x_{i+1}]\end{cases}$$

$u(x)=\sum_{i=1}^{n} f_i\cdot\varphi_i$ → def. también a trozos.

2º grado

$$\varphi_1(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_2}{x_1-x_2}\cdot\dfrac{x-x_3}{x_1-x_3} & x\in[x_1,x_3]\\ 0 & x\notin[x_1,x_3]\end{cases}\qquad \varphi_n(x)\begin{cases}\dfrac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}}\cdot\dfrac{x-x_{n-2}}{x_n-x_{n-2}} & x\in[x_{n-2},x_n]\\ 0 & x\notin[x_{n-2},x_n]\end{cases}$$

para ptos intermedios $i=2,n-1,2$

$$\varphi_i(x)=\begin{cases}\dfrac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\cdot\dfrac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}} & x\in[x_{i-1},x_{i+1}]\\ 0 & x\notin[\ \ ]\end{cases}$$

para ptos de conexión de subintervalos:

$i=3,n-2,2$

$$\varphi_i(x)=\frac{x-x_{i-2}}{x_i-x_{i-2}}\cdot\frac{x-x_{i-1}}{x_i-x_{i-1}}\quad x\in[x_{i-2},x_i],\quad \frac{x-x_{i+1}}{x_i-x_{i+1}}\cdot\frac{x-x_{i+2}}{x_i-x_{i+2}}\quad x\in[x_i,x_{i+2}],\quad 0\quad x\notin[x_{i-2},x_{i+2}]$$

INTEGRACIÓN NUMÉRICA (FINTI)

con soporte de $n+1$ puntos.
- sacamos pol. interpolador y lo integramos. (dd y Newton)

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\int_a^b p(x)dx=\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot f(x_i)$$
↳ integrales de pols de base.

- cualquier soporte → exactas para pol. grado $\leq n$.
- sop. equidistante (Newton-Cotes) → exactas para grado $\leq n$ (a veces tb $n+1$)
  ↳ abiertas (no usan extremos en el soporte) / cerradas (los usan)
- sop. específico (Gauss) → exactas para grado $2n+1$.

Rectángulo $\int_a^b f(x)dx\simeq \underbrace{(b-a)}_{h} f(a)$.

Rectángulo compuesto (con n puntos) $\int_a^b f(x)dx\simeq h\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)$ — no la total, sino la de ptos consecutivos $(b-a)/(N-1)$

Punto medio $\int_a^b f(x)dx\simeq (b-a)\cdot f\left(\frac{a+b}{2}\right)$.

Punto medio compuesta $\int_a^b f(x)dx\simeq h\cdot\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)$

Trapecio $\int_a^b f(x)\simeq\frac{b-a}{2}(f(a)+f(b))$

Compuesta $\frac{h}{2}\left(f(a)+2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)$

Simpson $\int_a^b f(x)dx\simeq\frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a)+4f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right)$ - NC soporte $a-h,\ a,\ h$

Compuesta $\frac{h}{6}\left(f(a)+4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i+x_{i+1}}{2}\right)+2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)+f(b)\right)$

En estas fórmulas estamos considerando soporte de n puntos. h en las compuestas se refiere a d. entre ptos consecutivos de x $h=(b-a)/(N-1)$

Fórmulas de Gauss

$$\int_a^b f(x)dx\simeq\int_a^b p(x)dx=\sum_{i=1}^{n} c_i\cdot f(x_i)$$

w_i → coeficientes de Gauss
z_i → puntos de Gauss
α,β → extremos de Gauss
a,b → extremos de integración
} en el enunciado

$a=m\cdot\alpha+n$, $b=m\cdot\beta+n$ } calculamos m y n.

calculamos c_i como $c_i=m\cdot w_i$, x_i como $x_i=m\cdot z_i+n$.
Hacemos el sumatorio (aprox de la integral).

También podemos aproximar la derivada como la derivada del polinomio interpolador.

Interpolación de Hermite → algún dato de derivada. Solo por sistema. Infinitas soluciones. En general grado = condiciones − 1. A menos que no cumpla alguna de la derivada.

Aproximación por mínimos cuadrados

- **Recta de regresión**. recta que minimice la suma de los cuadrados de las distancias entre la recta y los puntos.

$p(x)=a+bx$

$f(a,b)=\sum_{j=1}^{n}(u_j-(a+bs_j))^2$

$$\frac{\partial f}{\partial a}=0\quad n\cdot a+b\sum_{j=1}^{n}s_j=\sum_{j=1}^{n}u_j$$
$$\frac{\partial f}{\partial b}=0\quad a\sum_{j=1}^{n}s_j+b\sum_{j=1}^{n}s_j^2=\sum_{j=1}^{n}u_j\cdot s_j$$
} calculamos a y b.

- **Caso no lineal**. exactamente igual pero hay que ajustarse a una función dada (grado m−1, independientemente del nº de puntos).
↓
derivar parcialmente respecto a tantos valores como tengamos

$p(x)=a_1+a_2x+a_3x^2+\dots a_m x^{n-1}$

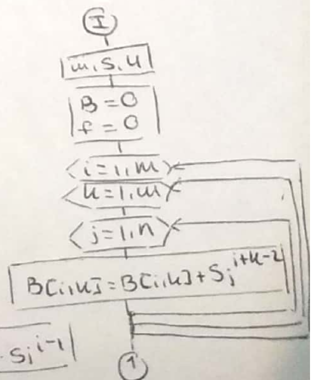
$f(a_1,\dots a_m)=\sum_{j=1}^{n}(u_j-(a_1+a_2s_j+a_3s_j^2+\dots a_ms_j^{n-1}))^2$

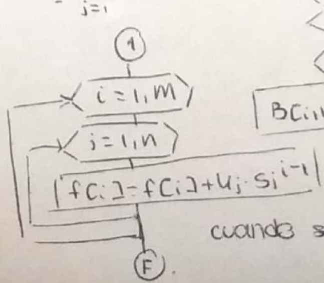
$$\frac{\partial f}{\partial a_1}=0\quad na_1+a_2\sum_{j=1}^{n}s_j+a_3\sum_{j=1}^{n}s_j^2+\dots a_m\sum_{j=1}^{n}s_j^{m-1}=\sum_{j=1}^{n}u_j$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_2}=0\quad a_1\sum_{j=1}^{n}s_j+a_2\sum_{j=1}^{n}s_j^2+a_3\sum_{j=1}^{n}s_j^3+\dots a_m\sum_{j=1}^{n}s_j^{m}=\sum_{j=1}^{n}u_j\cdot s_j$$
$$\vdots$$
$$\frac{\partial f}{\partial a_m}=0\quad a_1\sum_{j=1}^{n}s_j^{m-1}+a_2\sum_{j=1}^{n}s_j^{m}+a_3\sum_{j=1}^{n}s_j^{m+1}+\dots a_m\sum_{j=1}^{n}s_j^{2m-2}=\sum_{j=1}^{n}u_j\, s_j^{m-1}$$

resolvemos el vector de incógnitas.

$B\,X=f$ ↳ t. ind
B ↓ matriz coef (sum); X ↓ vector inc. (a)

$$B_{i,k}=\sum_{j=1}^{n}s_j^{\,i+k-2}$$
$$f_i=\sum_{j=1}^{n}u_j\cdot s_j^{\,i-1}$$
$i=1,m$
$k=1,m$

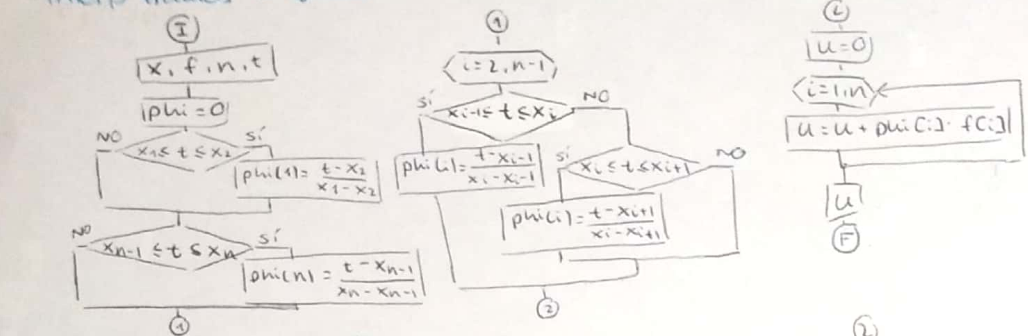




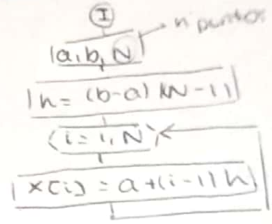
cuando sea un polinomio

ALGORITMOS

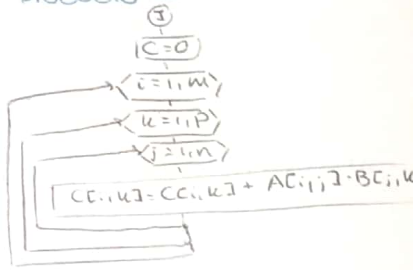
- Interp tramos 1er grado



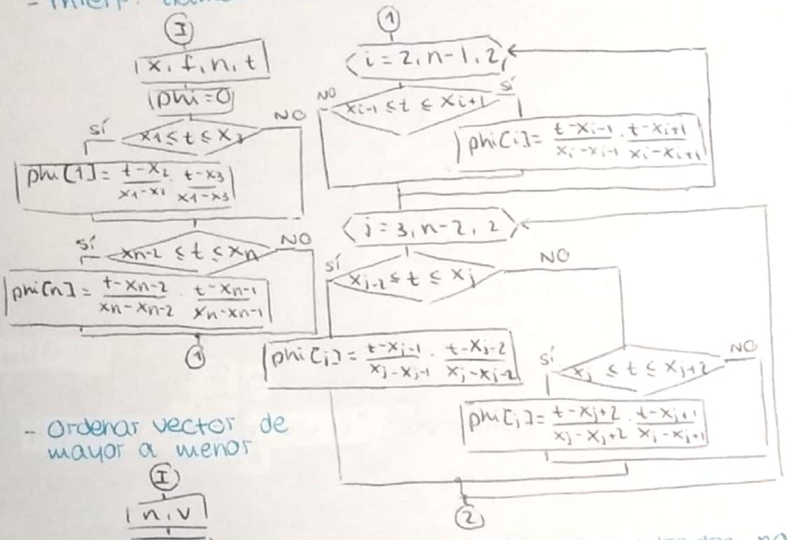
- Vector equidistante

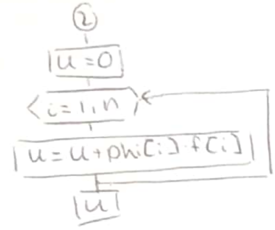


- Producto de matrices

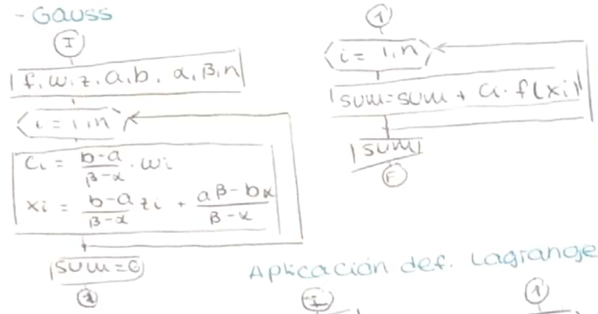


- Interp. tramos 2º grado

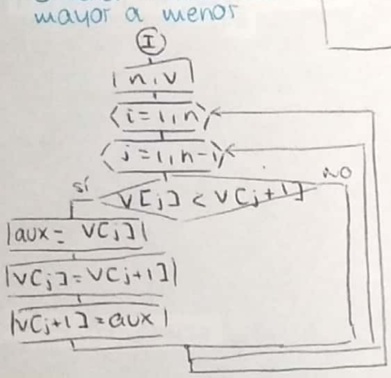




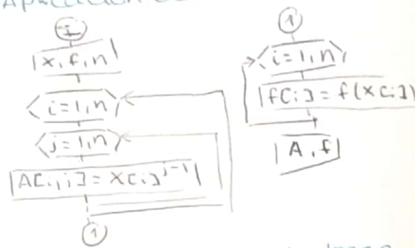
- Gauss



- Ordenar vector de mayor a menor



Aplicación def. Lagrange



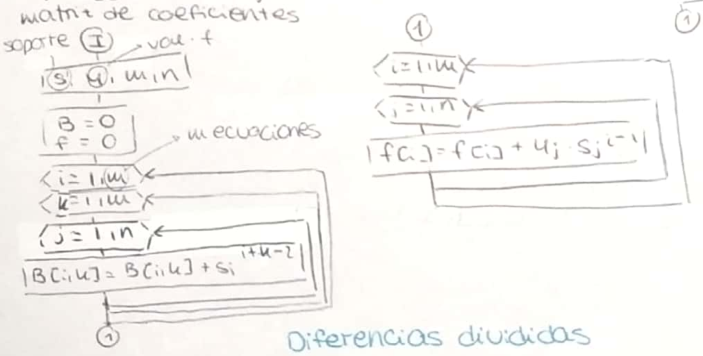
- Mínimos cuadrados no lineal

$p(x) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + \dots + a_m x^{m-1}$

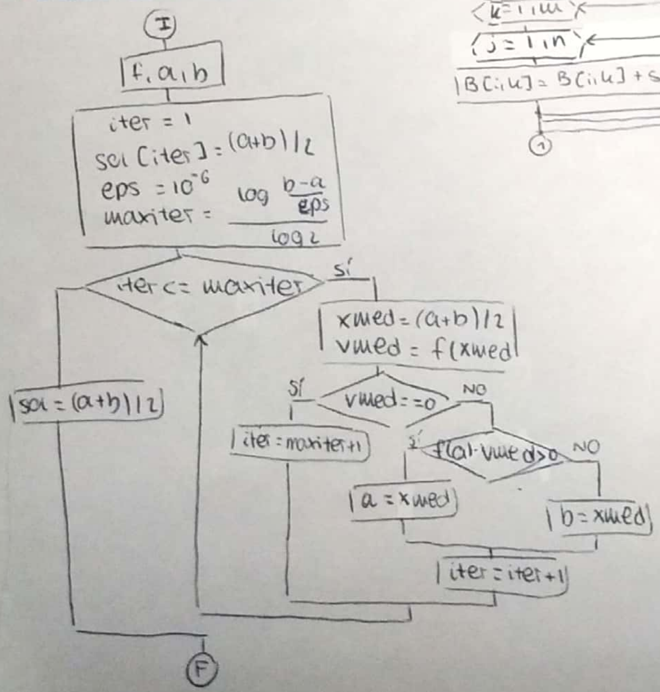
grado $m-1$, n puntos

$B \cdot A = f$ → términos independientes

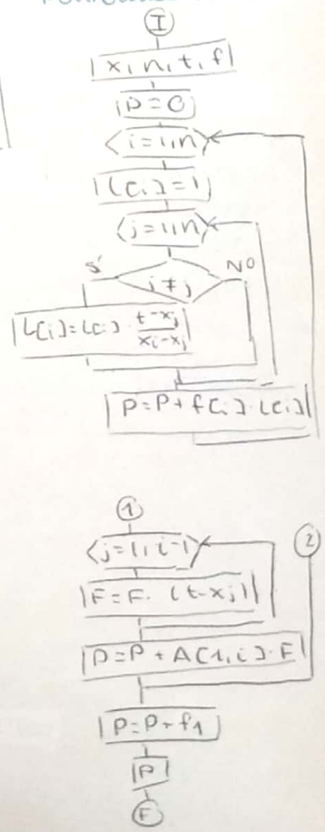
↑ vector de incógnitas ↓ matriz de coeficientes



- Método de bisección



Polinomios de base



Diferencias divididas