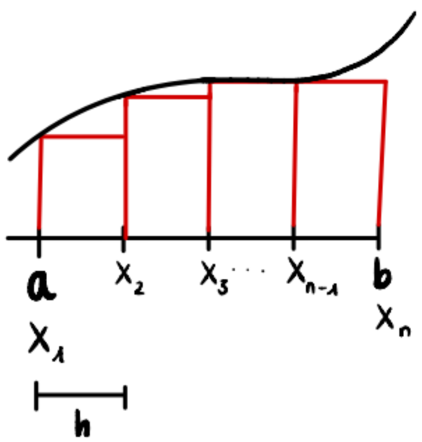
FÓRMULAS DE INTEGRACIÓN DE TIPO INTERPOLATORIO

Otra aplicación de la interpolación es la aproximación de integrales de funciones. Para ello, hay distintas fórmulas con mayor o menor exactitud.

Fórmulas compuestas.

Son de nuevo fórmulas con un punto soporte cualquiera. Se diferencian de las simples en que dividen los intervalos h en otros subintervalos, obteniendo una mayor precisión.

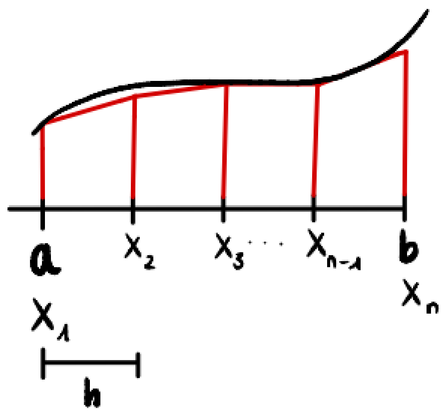
- **Rectángulo compuesto.**



$$\int_a^b f(x)dx \approx f(a)(x_2 - a) + f(x_2)(x_3 - x_2) + f(x_3)(x_4 - x_3) + \cdots + f(x_{n-1})(x_n - x_{n-1} = f(a)h + f(x_2)h + f(x_3)h + \cdots + f(x_{n-1})h$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_1)}$$

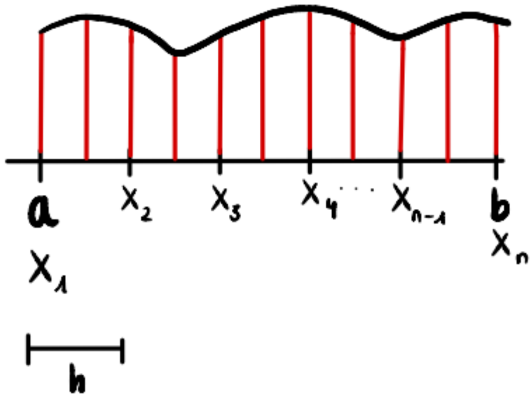
- **Trapecio compuesto.**



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,(f(a) + f(x_2) + f(x_2) + f(x_3) + f(x_3) + \cdots + f(x_{n-1}) + f(x_{n-1}) + f(b)$$

$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{2}\,(f(a) + (2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i)) + f(b))}$$

- **Fórmula compuesta de Simpson.**



$$\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left[\left(f(a) + 4f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + f(x_2)\right) + \left(f(x_2) + 4f\left(\frac{x_2 + x_3}{2}\right) + f(x_3)\right) + \left(f(x_{n-1}) + 4f\left(\frac{x_{n-1} + x_n}{2}\right) + f(b)\right)\right]$$

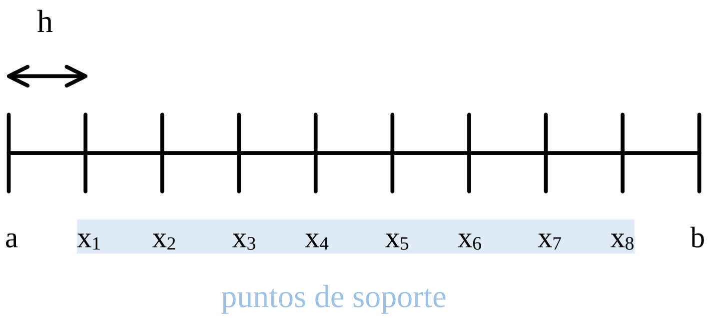
$$\boxed{\int_a^b f(x)dx \approx \frac{h}{6}\left(f(a) + 4\sum_{i=1}^{n-1} f\left(\frac{x_i + x_{i+1}}{2}\right) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right)}$$

Fórmulas de Newton-Cotes.

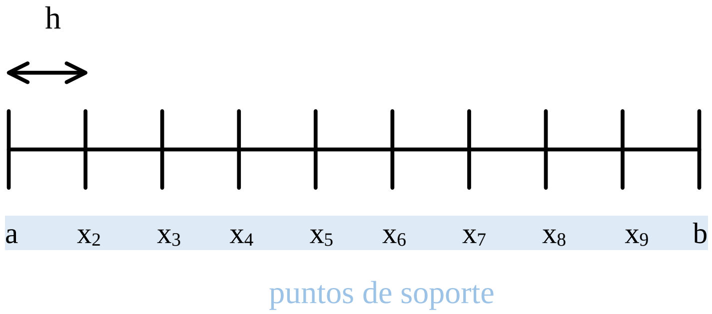
Utilizan un soporte equidistante (la distancia entre todos los puntos del soporte es la misma).

Si tenemos n+1 puntos, son exactas para polinomios de grado ≤ n, a veces también para polinomios de grado n+1. Distinguimos dos tipos:

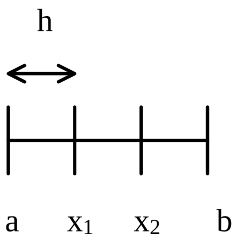
- **Fórmulas de Newton-Cotes abiertas:** no incluyen los extremos del intervalo en el soporte (a,b).



- **Fórmulas de Newton-Cotes cerradas.** Incluyen los extremos del intervalo de integración en el soporte [a,b].



Ejemplo. Obtener una función de Newton-Cotes abierta con 2 puntos de soporte para aproximar $\int_a^b f(x)dx$ y aplicarla a $\int_1^4 (x^3 + x^2 - 1)dx$.



Llamamos h a la distancia entre dos puntos consecutivos.

En primer lugar, realizaremos la tabla de diferencias divididas para obtener P(x).

Hay que expresar los puntos del soporte en función de a, b y h, ya que estos son valores conocidos. Esto se puede hacer antes o después de hallar el polinomio, en este caso lo haremos antes.

$x_1 = a + h$	$f(a+h)$	$\frac{f(a+2h)-f(a+h)}{a+2h-(a+h)} = \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}$
$x_2 = a + 2h$	$f(a+2h)$	

Como ya tenemos la tabla de diferencias divididas, ya podemos expresar el polinomio:

$$P(x) = f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}(x-(a+h))$$

Ahora, es tan sencillo como realizar la integral de dicho polinomio, y después expresarla y resolverla para la integral planteada en el enunciado.

$$\int_a^b P(x) = \int_a^b \left(f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}(x-(a+h)) \right) dx$$

$$\int_a^b P(x) = \int_a^b f(a+h)dx + \int_a^b \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}(x-(a+h))\, dx$$

$$\int_a^b P(x) = f(a+x) + \int_a^b xdx + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h} + \int_a^b \big(x-(a+h)\big)dx$$

$$\int_a^b P(x) = f(a+h)[x]_a^b + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}[\frac{x^2}{2} - ax - hx]_a^b$$

$$\int_a^b P(x) = (b-a)[f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{h}\left(\frac{a+b}{2} - (a+h)\right)]$$

$$\int_a^b P(x) = (b-a)(f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{2})$$

$$\int_a^b P(x) = 3h(f(a+h) + \frac{f(a+2h)-f(a+h)}{2})$$

$\int_a^b P(x) = \frac{3h}{2}(f(a+2h) + f(a+h))$

Observamos que la integral es del tipo $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i\, f(x_i)$, siendo c_i los coeficientes (esto se cumple en todas las integrales de tipo interpolatorio).

Identificamos las componentes, que en este caso son:

$f(x) = x^3 + x^2 - 1$ $\quad$ $h = \frac{b-a}{3} = 1$ $\quad$ $c_1 = c_2 = \frac{3h}{2} = \frac{3}{2}$

$x_1 = a + h = 2$ $\quad$ $x_2 = a + 2h = 3$

Aplicamos la función obtenida a $\int_1^4 (\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - 1)\mathrm{dx}$:

$$\int_1^4 (\mathrm{x}^3 + \mathrm{x}^2 - 1)\mathrm{dx} \approx \frac{3}{2}(f(3) + f(2) = \frac{3}{2}(3^3 + 3^2 - 1 + 2^3 + 2^2 - 1) = 69$$

La aproximación no es muy exacta ya que hemos utilizado únicamente dos puntos de soporte y el grado del polinomio es tres.

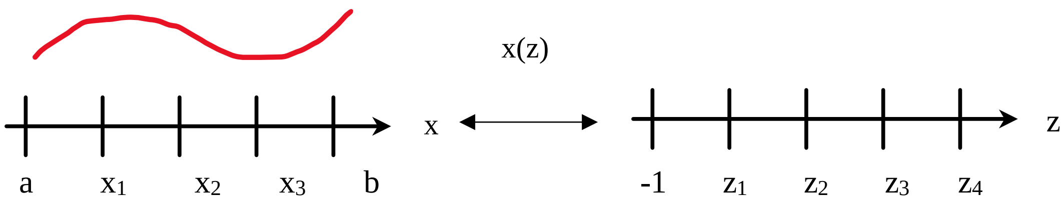
Fórmulas de Gauss.

Se trata de fórmulas que usan un soporte de n+1 puntos exactas para polinomios de grado ≤ 2n+1. Son las fórmulas de integración más precisas para un soporte dado.

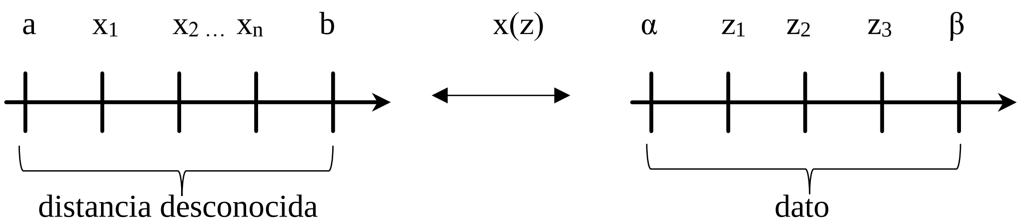
$\int_a^b f(x)dx \approx \int_a^b p(x)dx = \sum_{i=1}^n c_i\, f(x_i)$.

Desconocemos los valores de x_i y c_i, pero conocemos los valores de otros puntos (z_i) en el intervalo [-1,1] que utilizaremos para hallar el polinomio (son valores dados, se conocen como raíces de los polinomios de Legendre, pero no es necesario saberlo ya que el propio problema te aporta los datos necesarios).

Estamos haciendo, por tanto, una transformación:



De manera general:



Expresamos esta transformación lineal como una recta, de manera que se mantienen las posiciones de los puntos: $x = mz + n$

$a = m\alpha + n \qquad b = m\beta + n \qquad m = \frac{b-a}{\beta-\alpha}$

Obtenemos, por tanto, que:

$x = \frac{b-a}{\beta-\alpha} z + a - \frac{b-a}{\beta-\alpha}\alpha \qquad dx = \frac{b-a}{\beta-\alpha}\, dz$

(Esta es una forma de resolver el sistema, también puede resolverse por Cramer).

Resolvemos ahora la integral general para Gauss:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_\alpha^\beta f\left(\frac{b-a}{\beta-\alpha} z + a - \frac{b-a}{\beta-\alpha}\alpha\right)\frac{b-a}{\beta-\alpha} dz$$

$$= \frac{b-a}{\beta-\alpha}\int_\alpha^\beta f(\frac{b-a}{\beta-\alpha} z + a - \frac{b-a}{\beta-\alpha}\alpha)dz$$

$$\approx \frac{b-a}{\beta-\alpha}\sum_{i=1}^{n} w_i\, (\frac{b-a}{\beta-\alpha} z + a - \frac{b-a}{\beta-\alpha}\alpha)$$

Queríamos calcular $\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^n c_i\, f(x_i)$. Identificamos, por tanto, los elementos de la ecuación:

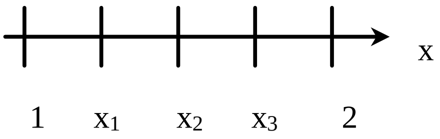
$c_i = \frac{b-a}{\beta-\alpha} w_i \;\;,\;\; x_i = \frac{b-a}{\beta-\alpha} z_i + a - \frac{b\alpha-a\alpha}{\beta-\alpha}$ (i=1,…,n).

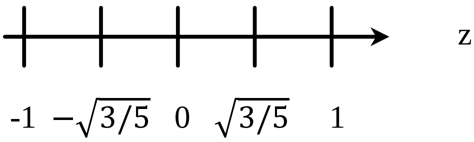
Teniendo los valores de la transformación, los ejercicios son muy sencillos.

Ejemplo. Resolver $\int_1^2 e^x sen(x)dx$ mediante una fórmula de Integración de Gauss con tres puntos de soporte sabiendo que en [-1,1]:

w_i	z_i
5/9	$-\sqrt{3/5}$
8/9	0
5/9	$\sqrt{3/5}$

Nota: el valor "exacto" de la integral es 4,487560334…





$x = mz + n$

$1 = -m + n \qquad 3 = 2n \rightarrow n = \frac{3}{2} \qquad 2 = m + n \qquad 1 = 2m \rightarrow m = \frac{1}{2}$

$x = \frac{1}{2}z + \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad dx = \frac{1}{2}dz$

$$x_1 = \frac{1}{2}z_1 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{2}$$

$$x_2 = \frac{1}{2}z_2 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}0 + \frac{3}{2} = \frac{3}{2}$$

$$x_3 = \frac{1}{2}z_3 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}} + \frac{3}{2}$$

$$\int_a^b f(x)dx \approx c_1 f(x_1) + c_2 f(x_2) + c_3 f(x_3)$$

$c_i = \frac{b-a}{\beta-\alpha} w_i$ (multiplica a dz)

$$c_1 = \frac{1}{2}w_1 = \frac{1}{2}\frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

$$c_2 = \frac{1}{2}w_2 = \frac{1}{2}\frac{8}{9} = \frac{8}{18}$$

$$c_3 = \frac{1}{2}w_3 = \frac{1}{2}\frac{5}{9} = \frac{5}{18}$$

Como ya conocemos el valor de todos los elementos, ya podemos sustituir y resolver el ejercicio:

$$\int_1^2 e^x sen(x)dx = \frac{5}{18} e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{3}{2}\right)} sen\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{3}{2}\right) + \frac{8}{18} e^{\left(\frac{3}{2}\right)} sen\left(\frac{3}{2}\right) +$$

$$+\frac{5}{18} e^{\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{3}{2}\right)} sen\left(\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{5}}+\frac{3}{2}\right) = 4{,}4875615$$ es el valor aproximado.

Como vemos, las fórmulas de Gauss aportan una precisión mucho mayor que cualquier otra fórmula de integración de tipo interpolatorio.

Algoritmo genérico para fórmulas de Gauss.