INTERPOLACIÓN DE LAGRANGE

La interpolación de Lagrange es una forma de presentar el polinomio que interpola un conjunto de puntos dado, es decir, consiste en la construcción de una expresión algebraica o función para conocer la imagen de un valor hallado en una serie de puntos conocidos. Los valores de dichos puntos, denominados soporte, en la función también son conocidos.

Para realizar la interpolación podemos realizar distintos métodos, entre ellos está el método de las funciones de base o polinomios de base, que veremos a continuación.

MÉTODO DE FUNCIONES DE BASE O POLINOMIOS DE BASE:

Consiste en un sumatorio de los productos de las imágenes del soporte por funciones específicas, las cuales se denominan base:

$$P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i L_i(x)$$

La forma de la función interpoladora quedaría de la siguiente manera, donde los valores de f son los de las imágenes de x y L(x) de las funciones de base:

$$\boxed{P(x) = f_1\, L_1(x) + f_2\, L_2(x) + f_3\, L_3(x) + \ldots + f_n\, L_n(x)}$$

Para que la interpolación sea correcta debe cumplirse que, para un punto soporte, el polinomio de base sean la unidad, mientras que en los demás puntos soporte sean nulos.

OBTENCIÓN DE LOS POLINOMIOS DE BASE:

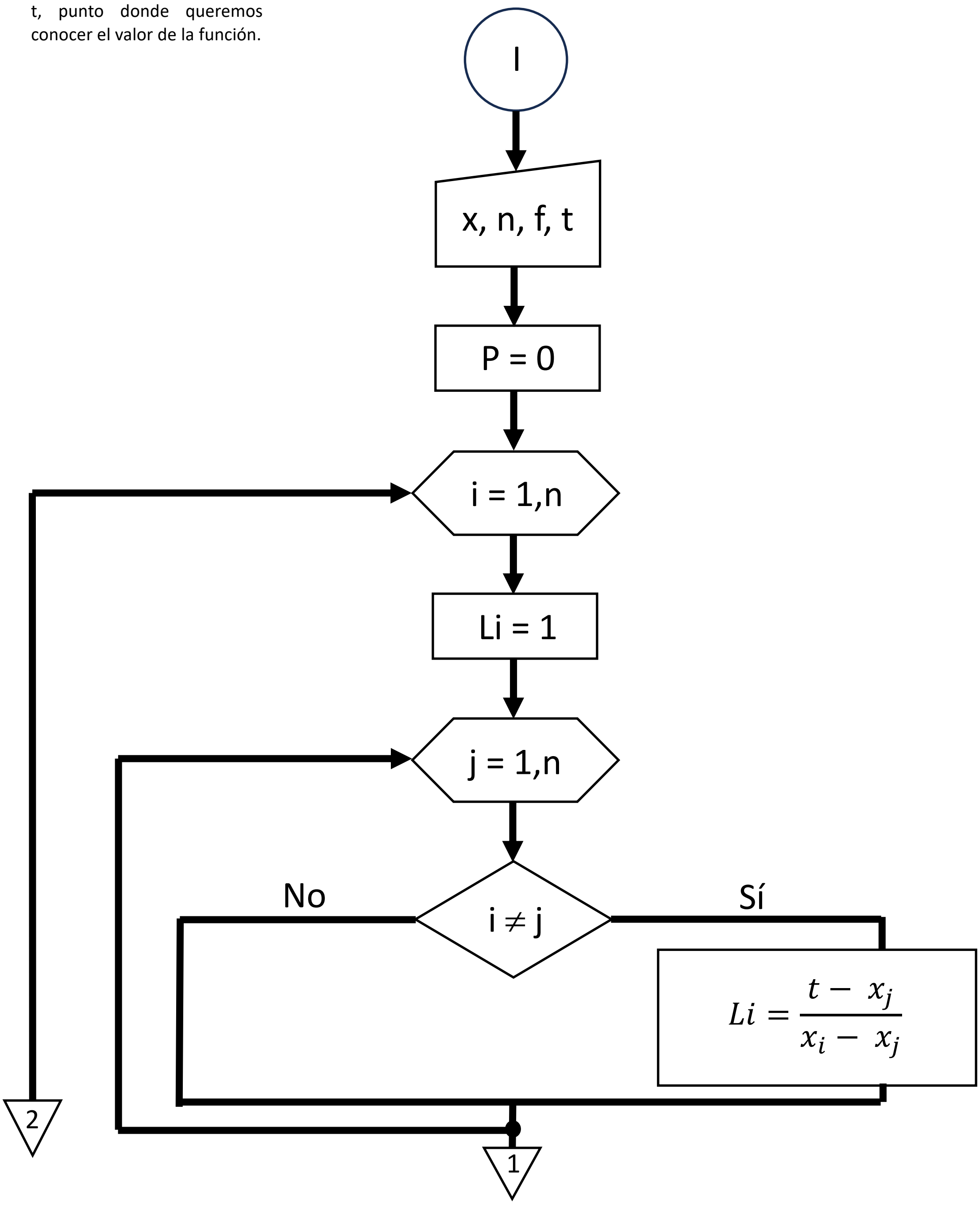
Para hallar los polinomios de base utilizaremos la siguiente fórmula general:

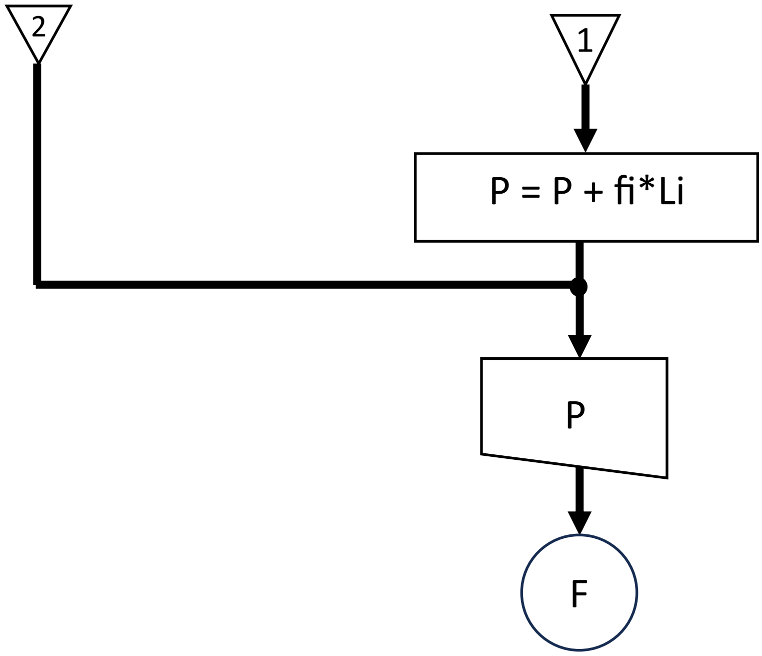
$$L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_i}{x_i - x_j}$$

L(x) son funciones de igual grado que P(x), por lo que tienen la forma: $L(x) = a + bx + cx^2 +\ldots+ mx^n$. Para hallar la expresión de L(x) se hace un sistema formado por todas las ecuaciones de L(x) para cada uno de los puntos soporte que tengamos. Una vez obtenidas las ecuaciones las sustituimos en la fórmula de la función interpoladora, P(x), la cual es la suma de los productos entre los polinomios de base y el valor de la función en esos puntos.

La forma de las gráficas de las funciones de base dependerá del soporte.

ALGORITMO PARA OBTENER LA FUNCIÓN INTERPOLADORA:





EJEMPLO CON 2 PUNTOS SOPORTE, GRADO 2:

Tenemos unos puntos soporte $\{x_1, x_2\}$ en los que conocemos el valor de la función $\{f_1, f_2\}$

Al tener dos puntos soporte obtendremos 2 polinomios de base:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1}$$

Ahora sustituimos en la función del polinomio interpolador:

$$P(x) = f_1\, L_1(x) + f_2\, L_2(x)$$

$$P(x) = f_1 \frac{(x - x_2)}{(x_1 - x_2)} + f_2 \frac{(x - x_1)}{(x_2 - x_1)}$$

EJERCICIO 1:

1) **Obtener el polinomio interpolador de Lagrange con los puntos soporte {-1, 0, 3} y sus respectivas imágenes en f(x) {2, 4, 1}.**
2) **Estimar P(1).**

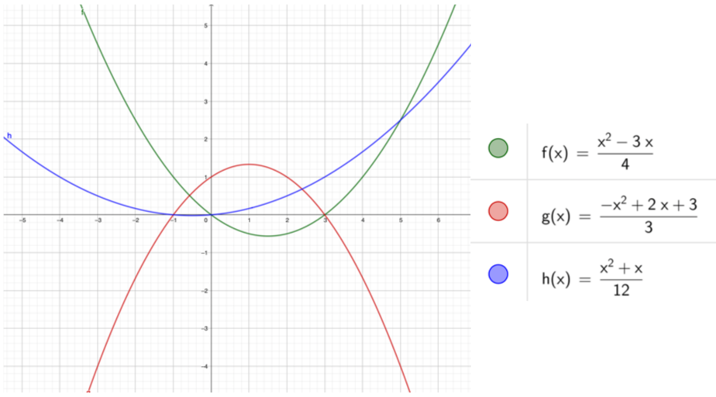
1) Primero vamos a calcular los polinomios de base:

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x - x_3)} = \frac{(x-0)(x-3)}{(-1-0)(-1-3)} = \frac{x(x-3)}{4} = \frac{x^2-3x}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x+1)(x-3)}{(0+1)(0-3)} = \frac{(x+1)(x-3)}{-3} = \frac{-x^2+2x+3}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x+1)(x-0)}{(3+1)(3-0)} = \frac{x(x+1)}{12} = \frac{x^2+x}{12}$$

Representación gráfica de los polinomios de base:



Ahora pasamos a calcular la función del polinomio interpolador:

$$P(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$P(x) = 2\frac{x^2-3x}{4} + \ 4\frac{-x^2+2x+3}{3} + 1\frac{x^2+x}{12}$$

2) Estimamos P(1):

$$P(1) = 2\frac{1-3}{4} + \ 4\frac{-1+2+3}{3} + 1\frac{1+1}{12} = \frac{9}{2} = 4{,}5$$

EJERCICIO 2:

Estimar la temperatura de un líquido a tiempo 2 segundos partiendo de los datos tiempos {1, 5, 8} y temperaturas {10, 20, 50}.

Los tiempos serán los puntos de soporte: x_1= 1, x_2= 5 y x_3= 8; y la temperatura el valor de la función: f_1= 10, f_2= 20, f_3= 50.

$$L_1(x) = \frac{(x - x_2)(x - x_3)}{(x_1 - x_2)(x - x_3)} = \frac{(x-5)(x-8)}{(1-5)(1-8)} = \frac{(x-5)(x-8)}{28}$$

$$L_2(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_3)}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} = \frac{(x-1)(x-8)}{(5-1)(5-8)} = \frac{(x-1)(x-8)}{-12}$$

$$L_3(x) = \frac{(x - x_1)(x - x_2)}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)} = \frac{(x-1)(x-5)}{(8-1)(8-5)} = \frac{(x-1)(x-5)}{21}$$

Ahora pasaremos a calcular la función del polinomio interpolador:

$$P(x) = f_1 L_1(x) + f_2 L_2(x) + f_3 L_3(x)$$

$$P(x) = 10\frac{(x-5)(x-8)}{28} + 20\frac{(x-1)(x-8)}{-12} + 50\frac{(x-1)(x-5)}{21}$$

Para estimar la temperatura del líquido a tiempo 2 segundos, simplemente sustituimos en la función anterior:

$$P(2) = 10\frac{(2-5)(2-8)}{28} + 20\frac{(2-1)(2-8)}{-12} + 50\frac{(2-1)(2-5)}{21} = \frac{65}{7} \approx 9{,}3℃$$