INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE. **MÉTODO 2: POLINOMIOS DE BASE**

Datos:
- Puntos soporte: $\{x_i\}_{i=1}^{n}$
- Valor de la función en los n puntos soporte: $\{f_i\}_{i=1}^{n}$
- $i = (1, \ldots, n)$

Resultado:
- Polinomio de grado $\leq n-1$, formado por n polinomios de base de Lagrange $L_i(x)$ de grado $= n-1$.

Polinomios de base de Lagrange $L_i(x)$:
- Solo dependen del soporte (no depende de la función que interpolamos) y cumplen que la suma de todos ellos siempre es 1: $\sum_{i=1}^{n} L_i(x) = 1$
- Se obtienen tantos polinomios de base de Lagrange como puntos soporte.
- Fórmula: $L_i(x) = \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = \frac{x - x_1}{x_i - x_1} \bullet \frac{x - x_2}{x_i - x_2} \bullet \ldots \bullet \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \bullet \frac{x - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}} \bullet \ldots \bullet \frac{x - x_n}{x_i - x_n}$
- Si $x = x_i \;\rightarrow\; \frac{x - x_j}{x_i - x_j} = 0$
- Delta de Kronecker:
  - $L_i(x) = 1$, si : $i = j$
  - $L_i(x) = 0$, si : $i \neq j$

Polinomio interpolador $P(x)$:
- Fórmula: $P(x) = \sum_{i=1}^{n} f_i \bullet L_i(x) = f_1 \bullet L_1(x) + f_2 \bullet L_2(x) + \ldots + f_n \bullet L_n(x)$

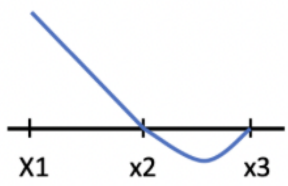
Pasos a seguir:
- Se obtienen los polinomios de base de Lagrange sustituyendo los datos en la fórmula.
- Se obtiene el polinomio interpolador sustituyendo en la fórmula.

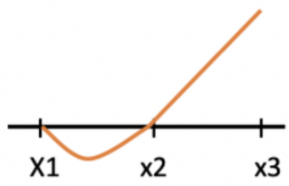
EJEMPLO:

Para $n = 3$

Obtenemos los polinomios de base de Lagrange:

$L_1(x) = \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \bullet \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$ $\quad$ $L_2(x) = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \bullet \frac{x - x_3}{x_2 - x_3}$ $\quad$ $L_3(x) = \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \bullet \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$





Obtenemos el polinomio interpolador: $P(x) = f_1 \bullet L_1(x) + f_2 \bullet L_2(x) + f_3 \bullet L_3(x)$

$$P(x) = f_1 \bullet \frac{x - x_2}{x_1 - x_2} \bullet \frac{x - x_3}{x_1 - x_3} + f_2 \bullet \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \bullet \frac{x - x_3}{x_2 - x_3} + f_3 \bullet \frac{x - x_1}{x_3 - x_1} \bullet \frac{x - x_2}{x_3 - x_2}$$

INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE. **MÉTODO 2: POLINOMIOS DE BASE**

EJERCICIO

Dados los puntos soporte {-1,0,3} y sus valores en la función, hallar el polinomio de Lagrange utilizando el método de POLINOMIOS DE BASE.

Método 2

P(x) = f(x_1) · L_1 + f(x_2) · L_2 + f(x_3) · L_3

$$L_1(x) = \frac{x-x_2}{x_1-x_2} \cdot \frac{x-x_3}{x_1-x_3} = \frac{x^2-3x}{4}$$

$$L_2(x) = \frac{x-x_1}{x_2-x_1} \cdot \frac{x-x_3}{x_2-x_3} = \frac{-x^2+2x+3}{3}$$

$$L_3(x) = \frac{x-x_1}{x_3-x_1} \cdot \frac{x-x_2}{x_3-x_2} = \frac{x^2+x}{12}$$

$$P(x) = 2 \cdot \frac{x^2-3x}{4} + 4 \cdot \frac{-x^2+2x+3}{3} + 1 \cdot \frac{x^2+x}{12} = 4 + \frac{5}{4}x - \frac{3}{4}x^2$$