EJERCICIO EXAMEN 2015 INTEGRACIÓN NUMÉRICA

Obtener una fórmula de integración numérica para aproximar el valor de la integral $\int_{-3h}^{3h} f(x)dx$ tomando como soporte los puntos $\{-2h, 3h\}$, siendo h un número real positivo.

SOLUCIÓN:

Obtenemos el polinomio interpolador con el soporte dado a partir de la fórmula de Newton:

$$p(x) \approx f(x) = f[x_1] + f[x_1, x_2](x - x_1) = f[x_1] + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)$$

Sustituimos $x_1 = -2h$ y $x_2 = 3h$:

$$p(x) = f(-2h) + \frac{f(3h)-f(-2h)}{3h+2h}(x + 2h) = f(-2h) + \frac{f(3h)-f(-2h)}{5h}(x + 2h)$$

Integramos el polinomio en el intervalo $[-3h, 3h]$ ya que es el intervalo que se nos indica en la integral $\int_{-3h}^{3h} f(x)dx$:

$$\int_a^b p(x)dx = \int_a^b \left(f[x_1] + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}(x - x_1)\right)dx = (b-a)\cdot\left(f[x_1] + \frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\cdot\left(\frac{a+b}{2} - x_1\right)\right)$$

Sustituyendo y haciendo cálculos:

$$\int_{-3h}^{3h} f(x)dx \approx \int_{-3h}^{3h} p(x)dx = \int_{-3h}^{3h}\left(f(-2h) + \frac{f(3h)-f(-2h)}{5h}(x + 2h)\right)dx = (3h+3h)\cdot\left(f(-2h) + \frac{f(3h)-f(-2h)}{5h}\cdot\left(\frac{-3h+3h}{2} + 2h\right)\right) = 6h\cdot\left(f(-2h) + \frac{f(3h)-f(-2h)}{5h}\cdot(2h)\right) = 6h\left(f(-2h) + \frac{2hf(3h)-2hf(-2h)}{5h}\right) = 6h\left(f(-2h) + \frac{2f(3h)-2f(-2h)}{5}\right) = \frac{6h}{5}\big(5f(-2h) + 2f(3h) - 2f(-2h)\big) = \frac{h}{5}\cdot 6\big(5f(-2h) + 2f(3h) - 2f(-2h)\big) = \frac{h}{5}\big(30f(-2h) + 12f(3h) - 12f(-2h)\big) = \frac{h}{5}\big(18f(-2h) + 12f(3h)\big)$$