EJERCICIO PARCIAL 2 CURSO 21-22

Se considera el intervalo [-4h,4h] en el que se desea obtener una fórmula de integración numérica de tipo interpolatorio para aproximar la integral:

$$\int_{-4h}^{4h} f(x)dx$$

El intervalo de integración se descompone en: [-4h,-2h], [-2h,2h], [2h,4h], de manera que habrá que calcular:

$$\int_{-4h}^{4h} f(x)dx = \int_{-4h}^{-2h} f(x)dx + \int_{-2h}^{2h} f(x)dx + \int_{2h}^{4h} f(x)dx$$

Empleando:

- En el tramo [-4h,-2h] un soporte formado por los puntos: {-4h,-3h}.
- En el tramo [-2h,2h] una fórmula de Simpson (no es necesario deducirla).
- En el tramos [2h,4h] un soporte formado por los puntos [3h/2,4h]

PRIMER TRAMO [-4h,-2h]

$a = -4h \quad x_1 = -4h$

$b = -2h \quad x_2 = -3h$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p(x)dx \cong \int_{-4h}^{-2h} \big(f[-4h] + f[-4h,-3h](x+4h)\big)dx =$$

$$= \int_{-4h}^{-2h} f[-4h]\,dx + \int_{-4h}^{-2h} (f[-4h,-3h](x+4h))dx$$

$$= f[-4h] \cdot \int_{-4h}^{-2h} dx + \int_{-4h}^{-2h} f[-4h,-3h] \cdot \int_{-4h}^{-2h} (x+4h)dx$$

$$= f[4h] \cdot (-2h+4h) + f[-4h,-3h] \cdot \left(\frac{(-2h)^2 - (-4h)^2}{2} + 4h(-2h+4h)\right)$$

$$= (2h) \cdot (f[-4h] + f[-4h,-3h] \cdot h)$$

$$= 2h \cdot f[-4h] + 2h \cdot f[-4h,-3h] \cdot h$$

$$= 2h \cdot f[-4h] + 2h^2 \cdot \frac{f(-3h) - f(-4h)}{-3h+4h} = 2hf(-4h) + 2hf(-3h) - 2hf(-4h) = 2h \cdot f(-3h)$$

SEGUNDO TRAMO [-2h,2h]

$$\int_{-2h}^{2h} f(x)dx = \frac{2h+2h}{6} \cdot \left(f(-2h) + 4f\left(\frac{-2h+2h}{2}\right) + f(2h)\right)$$

$$= \frac{2h}{3} \cdot (f(-2h) + 4f(0) + f(2h))$$

TERCER TRAMO [2h,4h]

$a = 2h \quad x_1 = \dfrac{3h}{2}$

$b = 4h \quad x_2 = 4h$

$$\int_{2h}^{4h} f(x)dx \cong \int_{2h}^{4h} p(x)dx = \int_{2h}^{4h} \left(f\left[\frac{3h}{2}\right] + f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right]\left(x - \frac{3h}{2}\right)\right)dx$$

$$= \int_{2h}^{4h} f\left[\frac{3h}{2}\right] dx + \int_{2h}^{4h} (f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right]\left(x - \frac{3h}{2}\right))dx$$

$$= f\left[\frac{3h}{2}\right] \cdot \int_{2h}^{4h} dx + \int_{2h}^{4h} f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right] \cdot \int_{2h}^{4h} \left(x - \frac{3h}{2}\right) dx$$

$$= f\left[\frac{3h}{2}\right] \cdot (4h - 2h) + f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right] \cdot \left(\frac{(4h)^2 - (2h)^2}{2} - \frac{3h}{2}(4h - 2h)\right)$$

$$= (2h) \cdot \left(f\left[\frac{3h}{2}\right] + f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right] \cdot \left(\frac{6h}{2} - \frac{3h}{2}\right)\right) = (2h) \cdot \left(f\left[\frac{3h}{2}\right] + f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right] \cdot \left(\frac{3h}{2}\right)\right)$$

$$2h \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right) + 3h^2 \cdot f\left[\frac{3h}{2}, 4h\right] = 2h \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right) + 3h^2 \cdot \frac{f(4h) - f\left(\frac{3h}{2}\right)}{4h - \frac{3h}{2}}$$

$$= 2h \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right) + 3h^2 \cdot \frac{f(4h) - f\left(\frac{3h}{2}\right)}{\frac{5h}{2}} = 2h \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right) + \frac{6h}{5} \cdot f(4h) - \frac{6h}{5} \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right)$$

$$= \frac{6h}{5} \cdot f(4h) + \frac{4h}{5} \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right)$$

SOLUCIÓN

$$\int_{-4h}^{4h} f(x)dx = \int_{-4h}^{-2h} f(x)dx + \int_{-2h}^{2h} f(x)dx + \int_{2h}^{4h} f(x)dx$$

$$\int_{-4h}^{4h} f(x)dx = 2h \cdot f(-3h) + \frac{2h}{3} \cdot \big(f(-2h) + 4f(0) + f(2h)\big) + \frac{6h}{5} \cdot f(4h) + \frac{4h}{5} \cdot f\left(\frac{3h}{2}\right)$$

Aplicar la fórmula obtenida en el apartado A) a la resolución de la integral

$$\int_{-2}^{2} \operatorname{sen}^2(x) \cos^3(x)\, dx$$

(ángulos en radianes), y calcular el error absoluto que se comete, sabiendo que el valor exacto de la integral es: 3.695778138

Como $\int_{-4h}^{4h} = \int_{-2}^{2}$ se deduce que $h = \frac{1}{2}$

$$\int_{-2}^{2} f(x)dx =$$

$$\operatorname{sen}^2\left(\frac{-3}{2}\right) \cos^3\left(\frac{-3}{2}\right) + \frac{1}{3} \cdot (\operatorname{sen}^2(-1)\cos^3(-1) + 4\operatorname{sen}^2(0)\cos^3(0) + \operatorname{sen}^2(1)\cos^3(1))$$

$$+ \frac{3}{5} \cdot \operatorname{sen}^2(2)\cos^3(2) + \frac{2}{5} \cdot \operatorname{sen}^2\left(\frac{3}{4}\right)\cos^3\left(\frac{3}{4}\right) = 0{,}078512 \ldots$$

Error: valor exacto – valor obtenido = $3{,}695778138 - 0{,}078512 = 3{,}617266 \ldots$