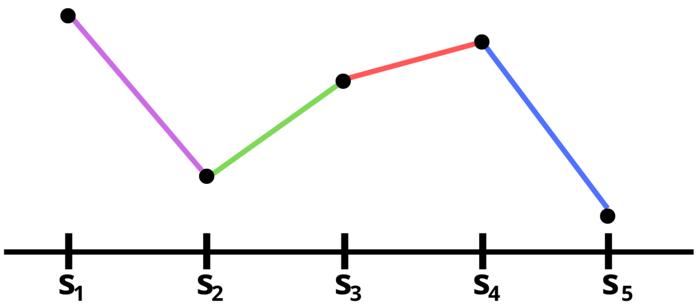
INTERPOLACIÓN POLINÓMICA DE LAGRANGE A TRAMOS

Utilizamos la interpolación a trozos (o tramos) cuando tenemos muchos puntos de soporte, debido a que al usar los otros métodos de interpolación de Lagrange obtenemos un polinomio con muchas oscilaciones, y esto puede hacer que no se ajuste para nada a la función que se está interpolando.

En este método obtenemos una función polinómica conformada por un grupo de funciones.

<u>INTERPOLACIÓN POR TRAMOS DE PRIMER GRADO</u>



Para obtener los polinomios que conforman la función polinómica podemos utilizar cualquiera de los métodos de interpolación de Lagrange: sistema de polinomios, polinomios de base de Lagrange e interpolación polinómica de Newton. A la función que interpolamos por tramos la llamaremos u(x).

Sistema de polinomios

Forma general:

$$u(x) = \begin{cases} p^{(1)}(x)\,,\ x \in [s_1\,,\ s_2] \\ p^{(2)}(x)\,,\ x \in [s_2\,,\ s_3] \\ \quad ... \\ p^{(n-1)}(x)\,,\ x \in [s_{n-1}\,,\ s_n] \end{cases}$$

$$\begin{cases} a_1 + b_1 \cdot s_1 = f_1 \\ a_1 + b_1 \cdot s_2 = f_2 \end{cases}$$

$$p^{(1)}(x) = a_1 + b_1 \cdot x$$

Polinomios de base de Lagrange
Como u(x) es continua las funciones que la componen también deben serlo, por lo que deben estar definidas en el intervalo con el que trabajamos.

Forma general

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_2}{s_1 - s_2} \ , \ x \in [s_1 , s_2] \\ \\ 0 \ , \ x \notin [s_1 , s_2] \end{cases}$$

$$\varphi_i(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_{i-1}}{s_i - s_{i-1}} \ , \ x \in [s_{i-1} , s_i] \\ \dfrac{x - s_{i+1}}{s_i - s_{i+1}} \ , \ x \in [s_i , s_{i+1}] \\ \\ 0 \ , \ x \notin [s_{i-1} , s_{i+1}] \end{cases}$$

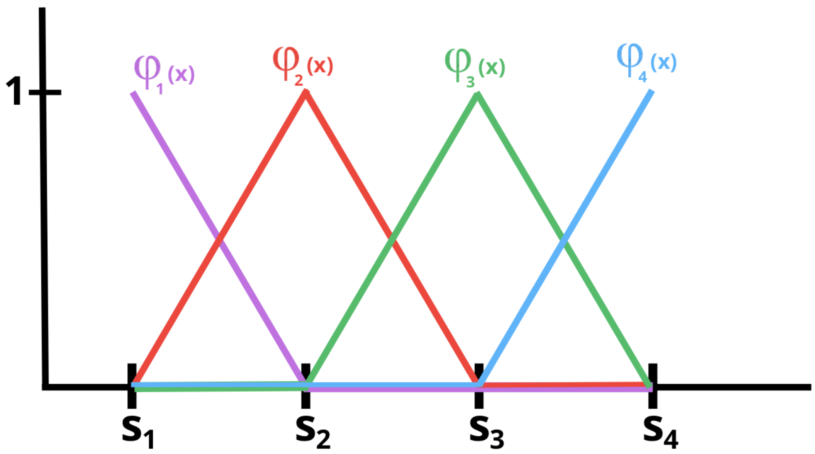
$$\begin{cases} \dfrac{x - s_{n-1}}{s_n - s_{n-1}} \ , \ x \in [s_{n-1} , s_n] \\ \varphi_n(x) = \\ 0 \ , \ x \in [s_1 , s_{n-1}] \end{cases}$$

$$U(x) = \begin{cases} f_1 \cdot \varphi_1^{(1)}(x) \ + \ f_2 \cdot \varphi_2^{(1)}(x) \ , \ x \in [s_1 , s_2] \\ f_2 \cdot \varphi_2^{(2)}(x) \ + \ f_3 \cdot \varphi_3^{(1)}(x) \ , \ x \in [s_2 , s_3] \\ \cdots \\ f_{n-1} \cdot \varphi_{n-1}^{(2)}(x) \ + \ f_n \cdot \varphi_n^{(1)}(x) \ , \ x \in [s_{n-1} , s_n] \end{cases}$$

Aplicado a 4 puntos de soporte:

$$
\mathcal{U}(x) = \begin{cases} f_1 \cdot \varphi_1^{(1)}(x) \; + \; f_2 \cdot \varphi_2^{(1)}(x) \; = f_1 \cdot \dfrac{x - s_2}{s_1 - s_2} \; + f_2 \cdot \dfrac{x - s_1}{s_2 - s_1} \quad , \quad x \in [s_1 , s_2] \\ f_2 \cdot \varphi_2^{(2)}(x) \; + \; f_3 \cdot \varphi_3^{(1)}(x) \; = f_2 \cdot \dfrac{x - s_3}{s_2 - s_3} \; + f_3 \cdot \dfrac{x - s_2}{s_3 - s_2} \quad , \quad x \in [s_2 , s_3] \\ f_3 \cdot \varphi_3^{(2)}(x) \; + \; f_4 \cdot \varphi_4^{(1)}(x) \; = f_3 \cdot \dfrac{x - s_4}{s_3 - s_4} \; + f_4 \cdot \dfrac{x - s_3}{s_4 - s_3} \quad , \quad x \in [s_3 , s_4] \end{cases}
$$

Su representación gráfica es la siguiente:



<u>INTERPOLACIÓN POR TRAMOS DE PRIMER GRADO</u>

Sistema de polinomios

$$
\begin{cases} a_1 \; + \; b_1 \cdot s_1 \; + \; c_1 \cdot s_1^2 \; = \; f_1 \\ a_1 \; + \; b_1 \cdot s_2 \; + \; c_1 \cdot s_2^2 \; = \; f_2 \\ a_1 \; + \; b_1 \cdot s_3 \; + \; c_1 \cdot s_3^2 \; = \; f_3 \end{cases}
$$

$$
p^{(1)}(x) \; = a_1 \; + \; b_1 \cdot x \; + \; c_1 \cdot x^2
$$

$$
\begin{cases} a_2 \; + \; b_2 \cdot s_1 \; + \; c_2 \cdot s_1^2 \; = \; f_3 \\ a_2 \; + \; b_2 \cdot s_2 \; + \; c_2 \cdot s_2^2 \; = \; f_4 \\ a_2 \; + \; b_2 \cdot s_3 \; + \; c_2 \cdot s_3^2 \; = \; f_5 \end{cases}
$$

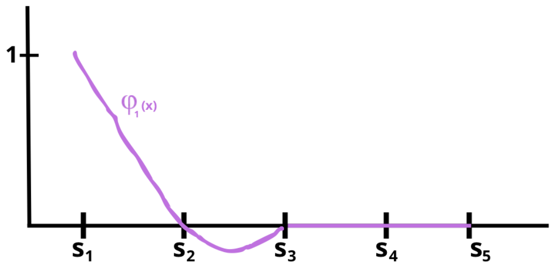
$$p^{(2)}(x) = a_2 + b_2 \cdot x + c_2 \cdot x^2$$

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} p^{(1)}, \ x \in [s_1, s_3] \\ p^{(2)}, \ x \in [s_3, s_5] \end{cases}$$

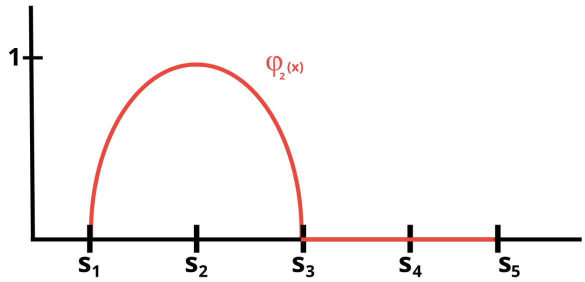
Funciones de base de Lagrange

$$\mathcal{U}(x) = \begin{cases} f_1 \cdot \varphi_1(x) + f_2 \cdot \varphi_2(x) + f_3 \cdot \varphi_3(x) & x \in [s_1, s_3] \\ f_3 \cdot \varphi_3(x) + f_4 \cdot \varphi_4(x) + f_5 \cdot \varphi_5(x) & x \in [s_3, s_5] \end{cases}$$

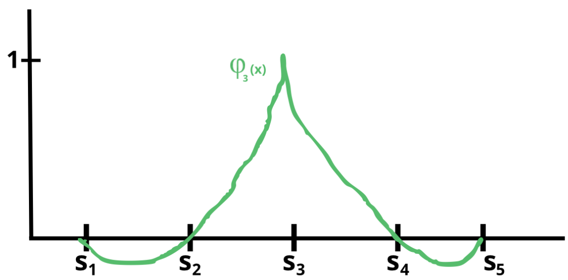
$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_3}{s_1 - s_3} \cdot \dfrac{x - s_2}{s_1 - s_2}, \ x \in [s_1, s_3] \\ 0, \ x \notin [s_1, s_3] \end{cases}$$



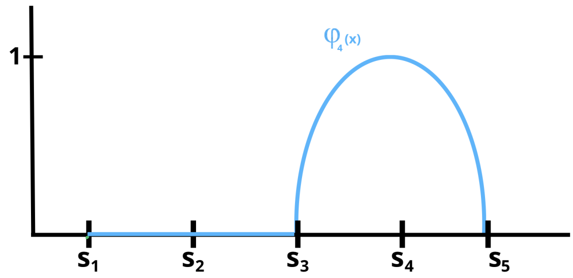
$$\varphi_2(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_1}{s_2 - s_1} \cdot \dfrac{x - s_3}{s_2 - s_3}, \ x \in [s_1, s_3] \\ 0, \ x \notin [s_1, s_3] \end{cases}$$



$$\varphi_3(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_2}{s_3 - s_2} \cdot \dfrac{x - s_1}{s_3 - s_1}, \ x \in [s_1, s_3] \\ \dfrac{x - s_4}{s_3 - s_4} \cdot \dfrac{x - s_5}{s_3 - s_5}, \ x \in [s_3, s_5] \\ 0, \ x \notin [s_1, s_5] \end{cases}$$



$$\varphi_4(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_3}{s_4 - s_3} \cdot \dfrac{x - s_5}{s_4 - s_5} \ , x \in [s_3, s_5] \\ \\ 0 \ , x \notin [s_3, s_5] \end{cases}$$



$$\varphi_5(x) = \begin{cases} \dfrac{x - s_3}{s_5 - s_3} \cdot \dfrac{x - s_4}{s_5 - s_4} \ , x \in [s_3, s_5] \\ \\ 0 \ , x \notin [s_3, s_5] \end{cases}$$