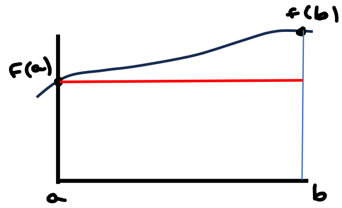
INTEGRACION NUMERICA

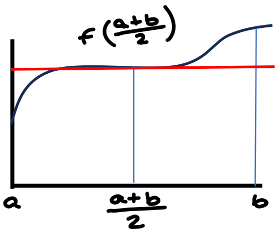


Buscamos aproximar integrales mediante funciones, utilizando fórmulas obtenidas por aproximación mediante polinomios.

Formula del rectángulo:

$$\int_a^b f(x)dx \cong f(a)(b-a)$$

Es exacta para polinomios de grado 0.

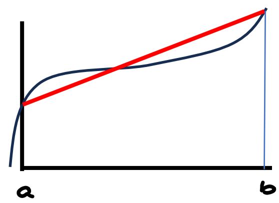


Formula punto medio (mid-point rule):

$\int_a^b f(x)dx \cong f\left(\frac{a+b}{2}\right)(b-a)$

Es exacta para polinomios de grado ≤1

Si f(x) es una **recta**: $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{f}{2}(f(a)+f(b))$



Regla del trapecio:

$$A = \frac{f(a)+f(b)}{2}(b-a) = \frac{b-a}{2}(f(a)f(b)) \cong \int_a^b f(x)dx$$

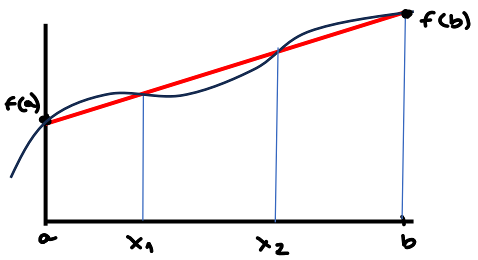
Es exacta para polinomios de grado ≤1

Se pueden obtener integrando el polinomio interpolador

Fórmulas de integración numérica:

- Tipo interpolatorio (FINTI) $\int_a^b f(x)dx \cong \sum_{i=1}^n C_i \cdot f(x_i)$ Siempre: $\sum_{i=1}^n C_i = b-a$
- Integración numérica = cuadratura numérica (Numeral Quadrature)

OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DEL TRAPECIO POR INTERPOLACIÓN:



Fórmula de Newton:

$$p(x) \cong f(x) = f[x_1] + f[x_1,x_2](x-x_1)$$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \big(f[x_1] + f[x_1,x_2](x-x_1)\big)dx$$

$$= \int_a^b f[x_1]\,dx + \int_a^b (f[x_1,x_2](x-x_1))dx$$

$$= f[x_1] \cdot \int_a^b dx + \int_a^b f[x_1,x_2] \cdot \int_a^b (x-x_1)dx$$

$$= f[x_1] \cdot (b-a) + f[x_1,x_2] \cdot \left(\frac{b^2-a^2}{2} - x_1(b-a)\right)$$

$$= (b-a) \cdot \left(f[x_1] + f[x_1,x_2] \cdot \left(\frac{a+b}{2} - x_1\right)\right)$$

Sirve para cualquier soporte $\{x_1, x_2\}$

Si x_1=a y x_2=b → $\int_a^b f(x)dx \cong (b-a) \cdot \left(f[x_1] + f[x_1,x_2] \cdot \left(\frac{a+b}{2} - x_1\right)\right)$

Ejercicio:

Obtener una FINTI con soporte $\{x_1, x_2\}$, siendo $x_2=x_1+h$

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p(x)dx = \int_a^b \big(f[x_1] + f[x_1,x_2](x-x_1)\big)dx$$

$$= \int_a^b \left(f[x_1] + \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}(x-x_1)\right)dx$$

$$= f[x_1]\cdot(b-a) + \frac{f(x_1+h)-f(x_1)}{h}\cdot\left(\frac{b^2-a^2}{2} - x_1(b-a)\right)$$

$$= (b-a)\left(f[x_1] + \frac{1}{h}(f(x_2)-f(x_1))\right)\cdot\left(\frac{a+b}{2} - x_1\right)$$

Ejemplo: si nos dicen que

$a=0 \quad x_1 = 0{,}3$ h=0,4

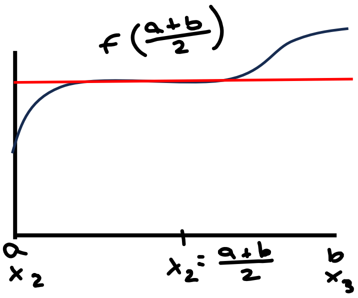
$b=1 \quad x_2 = 0{,}7$

$$\int_0^1 f(x)dx = (1-0)\left(f(0{,}3) + \frac{1}{0{,}4}(f(0{,}7)-f(0{,}3))\right)\cdot\left(\frac{1}{2} - 0{,}3\right)$$

$$= f(0{,}3) + \frac{5}{2}\big(f(0{,}7)-f(0{,}3)\big)\cdot\frac{1}{5}$$

$$= f(0{,}3) + \frac{1}{2}\big(f(0{,}7)-f(0{,}3)\big) = \frac{1}{2}f(0{,}3) + \frac{1}{2}f(0{,}7)$$

OBTENCIÓN DE LA FUNCIÓN DEL PUNTO MEDIO POR INTERPOLACIÓN:



<u>FORMULA DE SIMPSON</u>

$$\int_a^b f(x)dx \cong \int_a^b p(x)dx = \int_a^b (f[a] + f[a,x_2](x-a) + f[a,x_2,b](x-a)(x-x_2))dx$$

$$= \int_a^b \left(f[a] + f\left[a,\frac{a+b}{2}\right](x-a) + f[a,\frac{a+b}{2},b](x-a)(x-\frac{a+b}{2})\right)dx$$

$$= \frac{b-a}{6}\cdot\left(f(a) + 4f\left(\frac{a+b}{2}\right) + f(b)\right)$$