MÍNIMOS CUADRADOS

Ajuste por recta de regresión: caso lineal

Índice

¿Qué es y en qué consiste este método?...2

Operaciones...3

Algoritmos..5

Ejercicio resuelto..6

Ejercicio para practicar...7

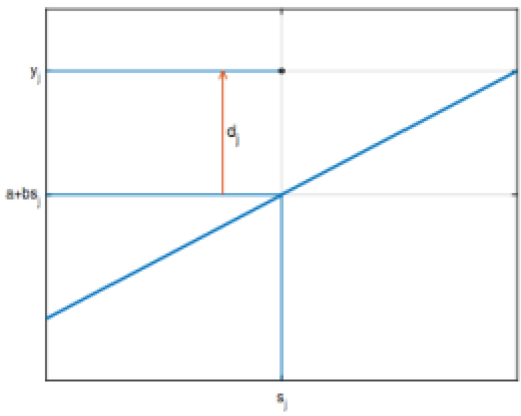
¿Qué es y en qué consiste este método?

La metodología de ajuste por mínimos cuadrados se trata de, a partir de un número determinado de puntos conocidos, obtener la función que se encuentre a la menor distancia posible de todos ellos. Para ello, lo más efectivo es buscar una recta de regresión del tipo:

$$R(x) = a + bx$$

NOTA: a diferencia de la interpolación de Lagrange, a menos que solamente tengamos dos puntos, la recta obtenida no va a pasar por todos ellos.

Al tratarse estos apuntes del caso lineal, la función que buscaremos será de grado uno, es decir, una recta. Así, el método consistirá en averiguar el valor de las incógnitas “a” y “b”, obteniendo para ello la distancia de cada valor de la nube de valores generando una ecuación que depende de a y b.



Observando este gráfico, dicha distancia es llamada “dj”, siendo la distancia entre el valor real en sj y el valor dado por la recta de regresión en sj: (a+bsj)

NOTA: sj se trata de una x cualquiera

Para obtener el valor de dicha distancia convertimos esta diferencia en la siguiente ecuación:

$$d_j^2 = \left(y_j - (a + bs_j)\right)^2$$

NOTA: yj se trata del valor real de sj (la x) y (a + bsj) se trata del valor dado por la recta de regresión.

Esta ecuación se encuentra elevada al cuadrado y posteriormente será minimizada (derivada e igualada a cero), de ahí que el método se llame mínimos cuadrados.

NOTA: al contar con dos incógnitas hemos de derivar parcialmente por cada una, obteniendo dos derivadas parciales (una de a y otra de b).

Operaciones

Como hemos de obtener la distancia de cada uno de los valores, es decir, de *n* valores lo que derivaremos es el sumatorio de la ecuación propuesta:

$$\sum_{j=1}^{n} d_j^2 = \sum_{j=1}^{n} \left(y_j - (a + bs_j)\right)^2 = f(a,b)$$

NOTA: f (a,b) es simplemente una manera de llamar al sumatorio, no la función que buscamos

Derivada respecto a la incógnita "a":

$$\frac{df}{da} = 2\sum_{j=1}^{n} [\left(y_j - (a + bs_j)\right)(-1)]$$

NOTA DE CÁLCULO: el 2 proviene de la derivación de la potencia, el -1 de la derivación de la a, que tiene un menos delante, y el (-1) multiplica a todo el paréntesis

Derivada respecto a la incógnita "b":

$$\frac{df}{db} = 2\sum_{j=1}^{n} [\left(y_j - (a + bs_j)\right)(-s_j)]$$

NOTA DE CÁLCULO: esta vez es (-sj) lo que multiplica a todo el paréntesis, ya que es el valor que acompaña a la incógnita b

Una vez realizadas las derivadas, igualamos a cero para terminar de minimizar:

Derivada respecto a la incógnita "a":

$$0 = \sum_{j=1}^{n} (y_j)(-1) + \sum_{j=1}^{n} \left(-(a + bs_j)\right)(-1)$$

$$\sum_{j=1}^{n} (y_j) = \sum_{j=1}^{n} (a) + \sum_{j=1}^{n} (bs_j)$$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n} (y_j) = na + b\sum_{j=1}^{n} (s_j)}$$

NOTA DE CÁLCULO: se expresa el sumatoria de a como na por comodidad, ya que a + a + a = 3*a, aunque si resulta más sencillo se puede dejar como sumatorio

Ahora, con las dos ecuaciones obtenidas, resolveremos el sistema de dos ecuaciones. El método puede ser el que cada uno prefiera, pero nosotros lo haremos por Cramer ya que lo hemos visto menos que Gauss.

NOTA: para que sea más sencillo de seguir y evitar errores innecesarios asignaremos un cambio de variable a cada uno de los sumatorios:

$\sum_{j=1}^{n}(yj)$ = y $\sum_{j=1}^{n}(sj)$ = s $\sum_{j=1}^{n}(sj2)$ = s2 $\sum_{j=1}^{n}(yjsj)$ = sy

Así, obtenemos la matriz:

$$\begin{pmatrix} n & s \\ s & s2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ sy \end{pmatrix}$$

Y obtenemos el determinante:

$$\begin{vmatrix} n & s \\ s & s2 \end{vmatrix} = n * s2 - s^2$$

Despejamos las variables:

$$a = \frac{\begin{vmatrix} y & s \\ sy & s2 \end{vmatrix}}{n * s2 - s^2} \quad \rightarrow \quad a = \frac{y * s2 - sy * s}{n * s2 - s^2}$$

$$b = \frac{\begin{vmatrix} n & y \\ s & sy \end{vmatrix}}{n * s2 - s^2} \quad \rightarrow \quad b = \frac{n * sy - s * y}{n * s2 - s^2}$$

Y por último deshacemos el cambio de variables:

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j) * \sum_{j=1}^{n}(s_j{}^2) - \sum_{j=1}^{n}(y_j s_j) * \sum_{j=1}^{n}(s_j)}{n * \sum_{j=1}^{n}(s_j{}^2) - \left(\sum_{j=1}^{n}(s_j)\right)^2}$$

$$b = \frac{n * \sum_{j=1}^{n}(y_j s_j) - \sum_{j=1}^{n}(s_j) * \sum_{j=1}^{n}(y_j)}{n * \sum_{j=1}^{n}(s_j{}^2) - \left(\sum_{j=1}^{n}(s_j)\right)^2}$$

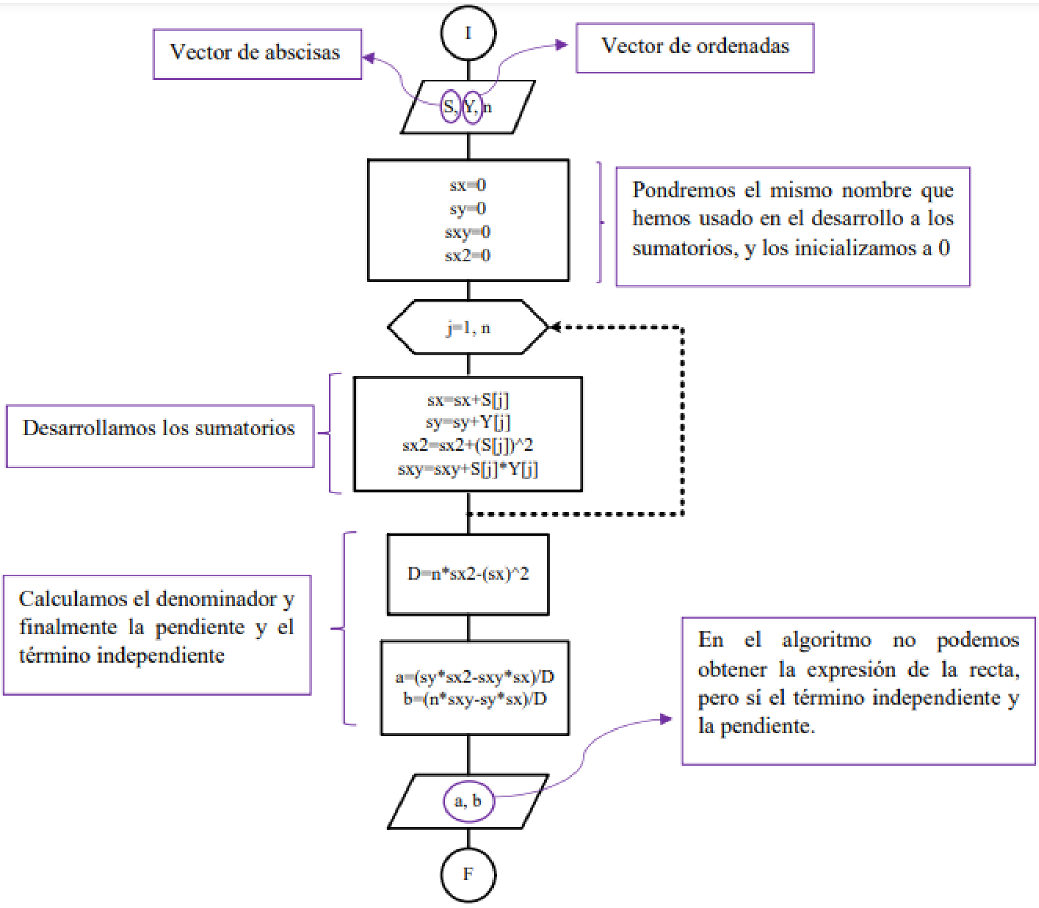
Así, hemos obtenido los valores de “a” y “b” en la recta de regresión: R(x) = a + bx

NOTA: Aunque parezca lioso, en el apartado Ejercicio resuelto verás como con hacer una tabla y sustituir en las ecuaciones deducidas, ya tienes el ejercicio hecho.

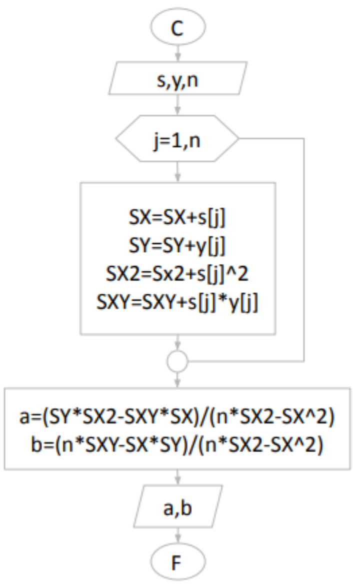
Algoritmos

A continuación, propondremos dos algoritmos, uno de ellos con notas explicativas, para hallar las incógnitas "a" y "b" de la recta de regresión.

Algoritmo 1:



Algoritmo 2:



Ejercicio resuelto

A continuación, resolveremos un ejercicio propuesto en Moodle en años anteriores, para demostrar como realizar este método con más claridad:

Dados los puntos: (0.1, –1), (0.8,0.95), (1.2,1.8), (1.2,1.9), (1.7,2.1) y (2.5,3.6), encuentra la ecuación de la recta que aproxima la nube de puntos por mínimos cuadrados.

Del enunciado deducimos que el valor de n = 6, que es el número de puntos totales.

El primer paso será realizar los sumatorios de sj (las x de los puntos), sj^2 (el cuadrado de las x), yj (las y de los puntos), y sjyj (el producto de las x con las y). Para facilitar la resolución del ejercicio recomendamos la organización de los datos en una tabla de este estilo:

s_j	s_j^2	y_j	$s_j y_j$
0.1	0.01	-1	-0.1
0.8	0.64	0.95	0.76
1.2	1.44	1.8	2.16
1.2	1.44	1.9	2.28
1.7	2.89	2.1	3.57
2.5	6.25	3.6	9.00
$\Sigma = 7.5$	$\Sigma = 12.67$	$\Sigma = 9.35$	$\Sigma = 17.67$

Así, simplemente nos quedará sustituir estos valores en las ecuaciones deducidas previamente y el ejercicio estará casi completo:

$$a = \frac{\sum_{j=1}^{n}(y_j) * \sum_{j=1}^{n}(s_j{}^2) - \sum_{j=1}^{n}(y_j s_j) * \sum_{j=1}^{n}(s_j)}{n * \sum_{j=1}^{n}(s_j{}^2) - \left(\sum_{j=1}^{n}(s_j)\right)^2}$$

$$a = \frac{9.35 * 12.67 - 17.67 * 7.5}{6 * 12.67 - 7.5^2}$$

$$\boxed{a = -0.7112}$$

$$b = \frac{n * \sum_{j=1}^{n}(y_j s_j) - \sum_{j=1}^{n}(s_j) * \sum_{j=1}^{n}(y_j)}{n * \sum_{j=1}^{n}(s_j{}^2) - \left(\sum_{j=1}^{n}(s_j)\right)^2}$$

$$b = \frac{6 * 17.67 - 7.5 * 9.35}{6 * 12.67 - 7.5^2}$$

$$\boxed{b = 1.8156}$$

Obtenidos los coeficientes, ya tenemos lo que buscábamos; la recta de regresión:

R(x) = -0.7112 + 1.8156x

Ejercicio para practicar

Por último, proponemos otro ejercicio extra, por si te sientes con fuerzas para seguir practicando el método de mínimos cuadrados.

¡ESPERAMOS QUE OS SEA DE AYUDA!

Tenemos el conjunto de puntos {(-1,0), (0,3), (1,2), (3,1)} Queremos aproximar por mínimos cuadrados esos puntos con la función g(x)=a+b sen(x), obtener dicha función.